

Karolina Karpińska

Instytut Historii Nauki PAN

ORCID 0000-0002-1477-6622

PODRECZNIKI DO MATEMATYKI STEFANA BANACHA W KONTEKŚCIE DOŚWIADCZEŃ SZKOLNYCH AUTORA

Mathematics textbooks by Stefan Banach in the context of his own school experiences

SUMMARY

The aim of this paper is to analyze the content of school textbooks, whose author or co-author was Stefan Banach (1892–1945), with particular attention paid to: the scope of exploring equations, the method of introducing geometry to school teaching (whether to start it with discussing the basic planimetric concepts or basic stereometric concepts, or discussing them both parallelly?), and the range of political arithmetic (currently called financial arithmetic) problems. The paper examines the extent to which Banach textbooks were innovative in this respect. The research is based on, among others, the textbooks used by Banach as a secondary school student and the ordinances of the Polish Ministry of Education (Ministry of Religious Affairs and Public Education) from 1922.

Key words: Stefan Banach, history of mathematics education, history of mathematics, algebra, geometry, political arithmetic, financial arithmetic, school textbooks

Słowa kluczowe: Stefan Banach, historia nauczania matematyki, historia matematyki, algebra, geometria, arytmetyka polityczna, matematyka finansowa, podręczniki szkolne

Stefan Banach to jeden z twórców lwowskiej szkoły matematycznej okresu międzywojennego, który dzięki odkryciom w zakresie analizy funkcjonalnej na stałe uplasował się w kręgu najwybitniejszych matematyków XX w.¹ Jego pozy-

¹ Stefan Banach w swojej rozprawie doktorskiej ugruntował podstawy tego działu matema-

cję dodatkowo wzmocniło założenie w 1929 r., wraz z Hugonem Steinhausem, „*Studia Mathematica*” – pierwszego na świecie specjalistycznego czasopisma matematycznego, poświęconego analizie funkcjonalnej. Trudno znaleźć matematyka czy historyka matematyki, który nie znałby nazwiska Stefana Banacha. Definicję przestrzeni Banacha, twierdzenie Banacha o punkcie stałym, twierdzenie Hahna–Banacha o funkcjonalach liniowych czy twierdzenie Banacha–Steinhaus’a o operatorach liniowych poznają studenci kierunków matematycznych na całym świecie.

Stefan Banach był autorem ponad pięćdziesięciu prac naukowych oraz kilkunastu podręczników szkolnych i akademickich. Jego działalność naukowa została bardzo dokładnie przeanalizowana przez naukowców. Zupełnie inaczej jest z jego działalnością dydaktyczną. Niewielu historyków matematyki czy historyków oświaty zadało sobie trud przeprowadzenia dogłębnej analizy podręczników przygotowanych przez Banacha, choćby pod względem wybranych aspektów. Spod jego pióra, jako autora bądź współautora, wyszło łącznie dziesięć podręczników szkolnych.

Pierwszy z nich Stefan Banach przygotował w 1923 r., już jako uznany naukowiec i profesor nadzwyczajny Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Banach zrobił doktorat bez ukończenia studiów magisterskich. Wprawdzie w latach 1910–1914 studiował mechanikę na Politechnice Lwowskiej, jednakże zaliczył jedynie połowę egzaminów i uzyskał tylko tak zwany półdyplom. Stefan Banach nie miał wykształcenia nauczycielskiego i nigdy nie był nauczycielem w szkole elementarnej (ludowej czy powszechnej) ani średniej. Podręczniki szkolne przygotowywał z pozycji naukowca.

Na treść umieszczoną w podręcznikach Banacha mogło mieć wpływ pięć czynników: matematyka, którą sam poznawał jako uczeń szkoły średniej, doświadczenie, które nabył w trakcie udzielania korepetycji z matematyki², jego własne poglądy na temat nauczania tego przedmiotu, zarządzenia polskiego ministerstwa oświaty (Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego) oraz jego naukowa wiedza z matematyki.

tyki. Zob. np. Stanisław Mazur, *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, „Wiadomości Matematyczne” 1961, t. 4, nr 3, s. 249–250; Siergiej Ł. Sobolew, *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, „Wiadomości Matematyczne” 1961, t. 4, nr 3, s. 261–264.

² Stefan Banach udzielał korepetycji już od najniższych klas gimnazjalnych. Jego kolega Marian Albiński (1892–1978) wspominał, że Banach „dawał płatne korepetycje młodszym kolegom szkolnym, a także tzw. korepetycje «na mieście», natomiast współkolegom z klasy pomagał bezinteresownie” (*Wspomnienia o Banachu i Wilkoszu*, „Wiadomości Matematyczne” 1976, t. 19, nr 1, s. 133–135). Korepetycji udzielał również jako student Politechniki Lwowskiej, a później jako pracownik krakowskiego przedsiębiorstwa budującego drogi (Hugo Steinhaus, *Stefan Banach*, *Archiwum Polskiej Akademii Nauk*, sygn. III–204/29, k. 1).

Podręczniki Banacha były bardzo popularne. Alina Dawidowiczowa (1918–2007), córka Leona Chwistka (1884–1944), wspominała, że z tych podręczników korzystało całe jej pokolenie³. Musiały zatem spełniać wymogi ministerialne. Nie wszystkie kwestie związane z nauczaniem matematyki były narzucane przez Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego – można znaleźć zagadnienia, których realizację pozostawiono w gestii autorów podręczników. W niniejszym artykule, na wybranych przykładach, zostanie zbadane, w jaki sposób zagadnienia tego typu były omawiane przez Banacha. W analizie uwzględniony zostanie także rys historyczny realizacji tych zagadnień w nauczaniu szkolnym na ziemiach polskich, ze szczególną uwagą poświęconą szkole średniej, do której uczęszczał Banach. Analiza pozwoli ustalić, na ile rozwiązania zaproponowane przez Banacha były innowacyjne. Warto zaznaczyć, że w dotychczasowych pracach o jego podręcznikach nie uwzględniono szerszego kontekstu, to znaczy zarządzeń ministerialnych, reform nauczania matematyki i materiału umieszczonego w innych podręcznikach szkolnych⁴.

Jednym z najważniejszych czynników, które mogły mieć wpływ na treści zawarte w podręcznikach Banacha był sposób, w jaki on sam uczył się matematyki w szkole średniej. W literaturze można znaleźć następującą opinię:

Banach należał do bardzo pilnych uczniów, co w kategorii geniuszy jest dość rzadkie. A trzeba wiedzieć, że ówczesny program nauczania uwzględniał przede wszystkim łacinę, grekę, języki nowożytne, natomiast mniejszą wagę przykładano do przedmiotów ścisłych. Banacha posłano do szkoły, kiedy była ona typowym gimnazjum klasycznym. Program więc nie pokrywał się ani ze zdolnościami, ani z zainteresowaniami Banacha. Matematyki nauczali ludzie nie zawsze kompetentni⁵.

Książka, z której pochodzi ten cytat, ma charakter popularnonaukowy. Powyższe stwierdzenie nie zostało w niej opatrzone odnośnikiem do źródła. Mimo to na książkę tę powołuje się znaczna część autorów prac naukowych poświęconych Stefanowi Banachowi⁶. W konsekwencji w literaturze panuje niechlubna

³ Alina Dawidowiczowa (z Chwistków), *Zeschnięte liście i kwiat... Wspomnienia*, Kraków 1989, s. 93.

⁴ Zob. np. Stanisław Domoradzki, *Stefan Banach's Textbooks (in 60th Memory of Death)*, [w:] *Matematika v škole dnes a zajtra*, red. Ján Gunčaga, Zdenko Takáč, Ružomberk 2005, s. 46–50; Krystyna Wuczyńska, *O podręcznikach szkolnych Stefana Banacha*, „Matematyka. Czasopismo dla Nauczycieli” 1992, nr 2, s. 96–100.

⁵ Roman Kałuża, *Stefan Banach*, Warszawa 1992, s. 16. Ta sama uwaga znajduje się w angielskim wydaniu tej książki: Roman Kałuża, *Through a Reporter's Eyes: The Life of Stefan Banach*, Boston–Bazylea–Berlin 1996, s. 5–6.

⁶ Zob. np. Małgorzata Przeniosło, *Droga naukowa Stefana Banacha (okres międzywojenny)*, [w:] *Znani i nieznani międzywojennego Lwowa*, red. Marek Przeniosło, Lidia Michalska-Bracha, Kielce 2007, s. 35; Emilia Jakimowicz, *A Remarkable Life*, [w:] *Stefan Banach: Remarkable Life*,

opinia o poziomie nauczania matematyki w szkole średniej, do której uczęszczał Banach.

Zofia Gołąb-Mayer⁷ twierdzi, że zainteresowania matematyczne młodego Banacha rozwinął nauczyciel, doktor Kamil Kraft (1873–1945). Zdaniem Zofii Pawlikowskiej-Brożek⁸ trudno mówić o wpływie jakiegokolwiek nauczyciela na jego rozwój matematyczny. Sprzecznych opinii jest więcej – Krzysztof Ciesielski stwierdza na przykład, że Banach uczęszczał do IV Gimnazjum w Krakowie⁹; zdaniem Wiesława Wójcika¹⁰ i Romana Dudy¹¹ – do IV Gimnazjum im. Henryka Sienkiewicza w Krakowie; Disan Nikonowicz mówi, że szkoła ta była filią Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie¹²; inne zdanie w tej kwestii ma Krzysztof Ciesielski¹³. Trudno wskazać powody tych rozbieżności. Jednakże w kontekście niniejszego artykułu istotne jest, by wszelkie wątpliwości związane z działalnością szkolną Banacha były rozwiane. Zagadnieniu temu poświęcona zostanie pierwsza część artykułu.

W drugiej części artykułu zostaną wymienione powody, dla których Stefan Banach zdecydował się przygotowywać podręczniki szkolne. W części trzeciej – okoliczności towarzyszące ich powstawaniu. Ostatnia część, najbardziej obszerna, to analiza trzech zagadnień z podręczników Banacha w kontekście ich realizacji w innych szkołach na ziemiach polskich (ze szczególnym uwzględnieniem IV Gimnazjum w Krakowie), używanych tam podręczników i zarządzeniach ministerialnych dotyczących nauczania matematyki.

Brilliant Mathematics, red. Emilia Jakimowicz, Adam Miranowicz, Gdańsk 2010, s. 1–28; Roman Duda, *Lwowska szkoła matematyczna*, Wrocław 2014, s. 240; Roman Duda, *Prawda i mity o pochodzeniu Banacha*, „Wiomości Matematyczne” 2009, t. 45, nr 2, s. 281–294; Lech Maligranda, *Review of the Book by Mariusz Urbanek, „Genialni. Lwowska Szkoła Matematyczna” (Polish) [Geniuses: The Lvov School of Mathematics]*, „Matematychni Studii” 2018, t. 50, nr 1, s. 105–112.

⁷ Zofia Gołąb-Meyer, *Edukacja szkolna w Cesarstwie Austro-Węgierskim w czasach Mariana Smoluchowskiego*, „Foton” 2017, nr 137, s. 22–33.

⁸ Zofia Pawlikowska-Brożek, *Stefan Banach w świetle wspomnień*, [w:] *Materiały z IV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki pt. „Matematyka przełomu XIX i XX wieku”*, red. Stanisław Fudali, Szczecin 1990, s. 101–112.

⁹ Krzysztof Ciesielski, *O pewnych faktach z życia Stefana Banacha*, „Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica. Opuscula Mathematica” 1993, nr 13, s. 59–69.

¹⁰ Wiesław Wójcik, *Banach Stefan*, [w:] *Polski wkład w przyrodznawstwo i technikę. Słownik polskich i związanych z Polską odkrywców, wynalazców oraz pionierów nauk matematyczno-przyrodniczych i techniki*, red. Bolesław Orłowski, Warszawa 2015–2019, t. 1, s. 74.

¹¹ Roman Duda, *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*, Wrocław 2012, s. 53.

¹² Disan Nikonowicz, *Stefan Banach (1892–1945)*, „Matematyka. Czasopismo dla Nauczycieli” 1992, t. 45, nr 2, s. 68–90.

¹³ Krzysztof Ciesielski, dz. cyt., s. 59–69.

1. Stefan Banach w IV Gimnazjum w Krakowie

Stefan Banach urodził się w 1892 r. w Krakowie. Po ukończeniu szkoły ludowej (na poziomie elementarnym) rozpoczął tam w 1902 r. naukę w szkole średniej. Kilka dekad wcześniej Galicja uzyskała autonomię, dlatego w szkołach obowiązywał polski język wykładowy. Programy nauczania były przygotowane przez Radę Szkolną Krajową¹⁴ i zatwierdzone przez Ministerstwo Wyznań i Oświecenia w Wiedniu.

Najlepszymi szkołami średnimi w rozważanym okresie były gimnazja i szkoły typu realnego¹⁵. Gimnazja ukierunkowane były na nauczanie przedmiotów humanistycznych, a szkoły typu realnego – przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. Ukierunkowanie to powodowało, że w gimnazjach w większym wymiarze godzinowym nauczano łaciny i greki, a w szkołach realnych wprowadzano wręcz dodatkowe przedmioty: język francuski, geometrię wykreślną i chemię¹⁶. W szkołach realnych program nauczania matematyki był szerszy niż w gimnazjach, głównie ze względu na zagadnienia z geometrii wykreślnej.

1.1. IV Gimnazjum na tle szkół średnich Krakowa

Z końcem roku szkolnego 1900/1901 istniało w Galicji łącznie czterdzieści gimnazjów i szkół realnych. W Krakowie funkcjonowały cztery szkoły średnie, a wśród nich – trzy gimnazja: I Gimnazjum Świętej Anny (zwane też Nowodworskim), II Gimnazjum Świętego Jacka, III Gimnazjum im. Króla Jana Sobieskiego, oraz jedna szkoła realna: Wyższa Szkoła Realna w Krakowie¹⁷.

Najstarszą z tych szkół było Gimnazjum Świętej Anny. Co więcej, była to najstarsza szkoła świecka w Polsce. Założono ją w 1588 r. jako szkołę-kolonie uniwersytetu w Krakowie. Nauczycielami w Gimnazjum Świętej Anny często byli profesorowie uniwersytetu, a wśród nich na przykład matematyk Jan Brożek (1585–1652); uczniowie mieli także prawo uczęszczania na wykłady akademickie, również z przedmiotów matematycznych¹⁸. W XVIII w. wykładano tam arytmetykę, algebrę, geometrię, trygonometrię, architekturę wojskową i cywilną, miernictwo i mechanikę¹⁹. Ważnym elementem procesu nauczania było podążanie za potrzebami społeczeństwa. Naukę matematyki łączono z jej praktycznymi

¹⁴ Programy nauczania przygotowane dla szkół znajdujących się w zaborze austriackim były wzorowane na austriackim *Zarysie organizacyjnym* z 1849 r..

¹⁵ Szkołami typu realnego były: szkoły realne, gimnazja realne i wyższe szkoły realne.

¹⁶ *Sprawozdanie X. C.K. Dyrekcyi Gimnazjum IV. (Realnego) w Krakowie za rok szkolny 1910/11*, Kraków 1911, s. 93–94.

¹⁷ *Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1901/2*, Lwów 1902, s. 3–4.

¹⁸ Grażyna Komarzyniec, *Nauczanie matematyki w krakowskiej Szkole Nowodworskiej*, Kraków 2004, s. 38.

¹⁹ Tamże, s. 62–65.

zastosowaniami. Przykładowo: nauczyciele zabierali uczniów na pola, łąki i do lasów, gdzie przy użyciu przyrządów mierniczych, takich jak znaczniki, łańcuchy i sznury miernicze, goniometry i stoliki miernicze, uczniowie rozwiązywali podstawowe zadania z miernictwa, na przykład znajdowali odległości między dwoma miejscami na ziemi, między którymi płynęła rzeka²⁰. Zmieniająca się sytuacja polityczna Polski powodowała, że szkoła miała swoje wzloty i upadki, niemniej jednak przez większość czasu była to szkoła prestiżowa, z rozbudowanym programem nauczania matematyki. W takiej formie wkroczyła w wiek XX.

Przełom XIX i XX w. charakteryzowany był przez wzrost frekwencji w szkołach średnich Galicji. W roku 1894/1895 przybyło w stosunku do roku poprzedniego 572 uczniów. Przyrost liczby uczniów w kolejnych latach obrazuje tabela 1.

Tab. 1. Przyrost liczby uczniów w szkołach średnich Galicji w latach 1894–1904²¹

Rok szkolny	1895/ 1896	1896/ 1897	1896/ 1898	1898/ 1899	1899/ 1900	1900/ 1901	1901/ 1902	1902/ 1903	1903/ 1904
Przyrost liczby uczniów w stosunku do roku poprzedniego	879	989	1131	1254	1371	1130	1866	2086	1914

Zanotowano również wzrost liczby osób zgłaszających się do szkół średnich – tabela 2.

Tab. 2. Liczba osób przystępujących do egzaminów wstępnych do szkół średnich w Galicji w latach 1898–1903²²

Rok	1898	1899	1900	1901	1902	1903
Liczba osób	469	508	512	569	589	6354

Zaszała potrzeba tworzenia nowych szkół, remontowania budynków szkolnych i kształcenia większej liczby nauczycieli. Wzrost liczby uczniów zanotowano też w Gimnazjum Świętej Anny. W roku 1898/1899 szkoła była zmuszona do prze-

²⁰ Zob. Witold Więśław, *Matematyka polska epoki Oświecenia*, Warszawa 2007, s. 70. Zadania tego typu omawiano też w szkołach średnich w XIX i XX w. Przykładowo: w czerwcu 1910 r. na egzaminie maturalnym przeprowadzonym w IV Gimnazjum w Krakowie, w terminie, w którym maturę zdawał Stefan Banach, inny uczeń, Adam Józef Obrubański (1892–1940), otrzymał następujące zadanie: „Jak obliczyć odległość dwóch punktów przedzielonych rzeką?” (Archiwum Narodowe w Krakowie, zespół: IV Państwowe Liceum i Gimnazjum im. Henryka Sienkiewicza w Krakowie, sygn. 29/1434/24).

²¹ *Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1901/2*, Lwów 1902, s. 6; *Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1902/3*, Lwów 1903, s. 6.

²² *Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1902/3*, Lwów 1903, s. 20.

niesienia części klas do innego budynku – w rezultacie z ośmiu oddziałów Gimnazjum Świętej Anny utworzono filię tej szkoły i umieszczono ją w kamienicy Götzów przy ulicy Podwale.

Kierownikiem tej filii został Antoni Pazdrowski – profesor Gimnazjum Świętej Anny, wieloletni nauczyciel matematyki i fizyki. 3 grudnia 1900 r. cesarz Austro-Węgier Franciszek Józef wydał postanowienie utworzenia z tych oddziałów oddzielnej placówki edukacyjnej: IV Gimnazjum w Krakowie²³. Niedługo po otwarciu IV Gimnazjum założono w Krakowie II Szkołę Realną²⁴.



Fot. 1. Budynek, w którym mieściło się IV Gimnazjum w Krakowie na początku XX w. (obecny widok)

IV Gimnazjum w Krakowie rozpoczęło funkcjonowanie wraz z początkiem roku szkolnego 1901/1902. Było w nim wówczas 455 uczniów (w sześciu klasach, od najniższej klasy pierwszej do najwyższej klasy szóstej), w tym 276 z wcześniejszej filii Gimnazjum Świętej Anny²⁵. W kadrze nauczycielskiej

²³ I. Sprawozdanie Dyrekcji C.K. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1902, Kraków 1902, s. 74.

²⁴ Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1901/2, Lwów 1902, s. 5.

²⁵ I. Sprawozdanie Dyrekcji C.K. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1902, Kraków 1902, s. 70.

zasiadało 24 nauczycieli. Połowa z nich była związana z Gimnazjum Świętej Anny: 10 nauczycieli zostało przeniesionych do IV Gimnazjum z Gimnazjum Świętej Anny, dwóch nauczycieli prowadziło zajęcia równolegle w obu szkołach. Pozostali nauczyciele przybyli do IV Gimnazjum z innych szkół, na przykład z Gimnazjum w Jasle czy Gimnazjum w Podgórzu. Byli też tacy, którzy w IV Gimnazjum dopiero rozpoczynali swoją karierę zawodową²⁶. Pięciu z tych 24 nauczycieli posiadało stopień naukowy doktora, czyli osoby z doktoratem stanowiły około 21% kadry nauczycielskiej²⁷. W tym samym czasie, w Gimnazjum Świętej Anny stanowiły one około 18%. Warto tu zwrócić uwagę na to, że w latach 1850–1918 w całej Galicji nauczyciele posiadający stopień doktora stanowili jedynie około 8% wszystkich nauczycieli²⁸. Tym samym obie szkoły zdecydowanie przewyższały średnią. W roku 1901/1902 w IV Gimnazjum w Krakowie nie było nauczyciela matematyki z doktoratem. Nauczycielem matematyki z największym stażem pracy był Antoni Pazdrowski i to on prowadził lekcje w najwyższej klasie szóstej. Oprócz niego było jeszcze czterech nauczycieli tego przedmiotu: Roman Gutwiński (pracujący na stanowisku profesora), Bronisław Piątkiewicz, Jan Walczak i Wilhelm Schmidt (wszyscy trzej na stanowiskach zastępcy nauczycieli).

W literaturze można znaleźć informacje, że szkoła, do której uczęszczał Stefan Banach, nie była renomowana²⁹. Została ona otwarta rok przed wstąpieniem do niej Stefana Banacha, więc nie miała swoich tradycji. Jednakże nie była to

²⁶ Zob. tamże, s. 74–75.

²⁷ W latach, w których Stefan Banach uczył się w IV Gimnazjum, odsetek doktorów przedstawiał się następująco:

- 1902/1903 – 24 nauczycieli, 5 ze stopniem doktora, czyli około 21%;
- 1903/1904 – 27 nauczycieli, 5 ze stopniem doktora, czyli około 19%;
- 1904/1905 – 32 nauczycieli, 4 ze stopniem doktora, czyli około 13%;
- 1905/1906 – 37 nauczycieli, 5 ze stopniem doktora, czyli około 13%;
- 1906/1907 – 30 nauczycieli, 5 ze stopniem doktora, czyli około 17%;
- 1907/1908 – 30 nauczycieli, 5 ze stopniem doktora, czyli około 17%;
- 1908/1909 – 35 nauczycieli, 9 ze stopniem doktora, czyli około 26%;
- 1909/1910 – 33 nauczycieli, 7 ze stopniem doktora, czyli około 21%.

Zob. II. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV w Krakowie za rok szkolny 1903*, Kraków 1903; III. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1904*, Kraków 1904; IV. *Sprawozdanie Dyrekcji c. k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1905*, Kraków 1905; V. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1906*, Kraków 1906; VI. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1907*, Kraków 1907; VII. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908*, Kraków 1908; VIII. *Sprawozdanie c.k. Dyrekcji Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908/9*, Kraków 1909; IX. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1910*, Kraków 1910.

²⁸ Krystyna Rakoczy-Pindor, *Wychowanie nauczyciela gimnazjalnego matematyki w Galicji w latach 1850–1918*, [w:] *Dzieje matematyki polskiej*, red. Witold Wiśław, Wrocław 2012, s. 163.

²⁹ Małgorzata Przeniosło, *Droga naukowa...*, dz. cyt., s. 35.

zwykła szkoła. Powstała w oparciu o tradycje i kadre nauczycielską (na czele z dyrektorem) jednej z najlepszych szkół średnich na ziemiach polskich – Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie³⁰.

1.2. Gimnazjum kontra szkoła realna. Dlaczego Banacha posłano do gimnazjum?

Roman Kałuża zaznaczył, że „Banacha posłano do szkoły, kiedy była ona typowym gimnazjum klasycznym. Program więc nie pokrywał się ani ze zdolnościami, ani z zainteresowaniami Banacha”³¹. Sugerowanie, jakoby poziom nauczania matematyki we wszystkich gimnazjach klasycznych był niski, jest krzywdzące. W obu typach szkół zagadnienia omawiane na lekcjach matematyki były zbliżone³². Główna różnica programowa polegała na tym, że w szkołach realnych omawiano geometrię wykreślną – tego działu matematyki nie wprowadzano w gimnazjach.

Przykładowo, program nauczania matematyki w klasie siódmej gimnazjum na początku XX w. obejmował: równania kwadratowe, równania wykładnicze, szeregi, rachunek procentów składanych, trygonometrię płaską i sferyczną oraz geometrię analityczną³³, podczas gdy w równoległej klasie szkół realnych omawiano: dwumian Newtona, teorię prawdopodobieństwa, trygonometrię sferyczną, geometrię analityczną i geometrię wykreślną – rzuty powierzchni kuli, jej przekroje płaskie, płaszczyzny, walce i stożki styczne do kuli, teorię cieni³⁴.

Dlaczego opiekunowie Banacha nie zdecydowali się go posłać do szkoły realnej? Jediną szkołą realną w Krakowie w 1902 r. była Wyższa Szkoła Realna. Została ona założona w 1871 r.³⁵ i mieściła się w centrum Krakowa³⁶. W roku

³⁰ W sprawozdaniu Gimnazjum Świętej Anny z 1901 r. wyraźnie został zaznaczony związek jednego i drugiego gimnazjum: podano terminy egzaminów wstępnych do obu gimnazjów oraz informację, że uczniowie mogą się przenieść z jednego gimnazjum do drugiego, co wystarczyło jedynie zgłosić dyrekcji (*Sprawozdanie Dyrektora C.K. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1901*, Kraków 1901, s. 79–81).

³¹ Roman Kałuża, *Stefan Banach*, dz. cyt., s. 16; tenże, *Through a Reporter's Eyes...*, dz. cyt., s. 5–6.

³² W szkołach realnych, ze względu na większą liczbą godzin lekcyjnych matematyki tygodniowo, zagadnienia matematyczne były omawiane dokładniej niż w gimnazjach.

³³ *VIII. Sprawozdanie c.k. Dyrekcji Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908/9*, Kraków 1909, s. 45 i 56; *VII. Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908*, Kraków 1908, s. 70.

³⁴ *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. I Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1905*, Kraków 1905, s. 88, 91.

³⁵ *Szematyzm Królestwa Galicji i Lodomeryi z Wielkim Księstwem Krakowskim na rok 1876*, Lwów 1876, s. 408.

³⁶ Część klas mieściła się przy ulicy Granicznej, dzisiaj ulicy Piotra Michałowskiego (*Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za r. 1902*, Kraków 1902, s. 42).

szkolnym 1901/1902 było w niej 42 nauczycieli i 5 z nich miało stopień naukowy doktora, co stanowiło około 12% całej kadry nauczycielskiej (nauczyciele matematyki nie mieli doktoratów)³⁷. Opłaty we wszystkich gimnazjach i Wyższej Szkole Realnej w Krakowie były jednakowe i wynosiły odpowiednio³⁸:

- egzamin wstępny – 24 koron;
- na środki naukowe (każdy uczeń przy wpisie) – 2 korony;
- taksa wstępna dla uczniów rozpoczynających naukę w szkole – 4 korony 20 halerzy;
- opłata semestralna – 40 koron;
- na gry i zabawy szkolne (opłata raz na rok) – 1 korona.

Tym samym nie mogło chodzić o kwestie finansowe. Co więcej, uczęszczanie do Wyższej Szkoły Realnej byłoby mniej kosztowne, bo nauka tam trwała o jeden rok krócej niż w gimnazjach. Wydaje się, że powodem nie była również odległość szkoły od domu – Wyższa Szkoła Realna, IV Gimnazjum i Gimnazjum Świętej Anny mieściły się w centrum Krakowa i odległości między nimi były niewielkie.

Do gimnazjów i szkół realnych obowiązywały również jednakowe egzaminy wstępne³⁹. Zazwyczaj przeprowadzał je dyrektor szkoły wraz ze specjalnie wydelegowanymi członkami rady pedagogicznej. W trakcie egzaminów wstępnych z matematyki wymagano od uczniów znajomości: liczb od jeden do miliona, czterech podstawowych działań arytmetycznych na liczbach całkowitych, tabliczki mnożenia oraz podstawowych miar metrycznych⁴⁰.

³⁷ *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za r. 1902*, Kraków 1902, s. 38–41.

³⁸ *I. Sprawozdanie Dyrekcji C.K. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1902*, Kraków 1902, s. 83; *Sprawozdanie Dyrektora C.K. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1902*, Kraków 1902, s. 85–86; *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za r. 1902*, Kraków 1902, s. 93, 95 (tutaj nie została wymieniona opłata za egzamin); *Sprawozdanie Osiemnaste Dyrekcji c.k. Gimnazjum III. w Krakowie za rok szkolny 1901*, Kraków 1901, s. 75.

³⁹ Do gimnazjów i szkół realnych mogły uczęszczać wszystkie osoby, które zdały egzamin wstępny, niezależnie od pochodzenia. Wśród uczniów gimnazjów i szkół realnych byli: synowie arystokracji, dyrektorów szkół, dyrektorów kopalni, nauczycieli, urzędników kolejowych, lekarzy, restauratorów, kupców, rolników czy kominiarzy (zob. Archiwum Narodowe w Krakowie, zespół: IV Państwowe Liceum i Gimnazjum im. Henryka Sienkiewicza w Krakowie, sygn. 29/1434/9).

⁴⁰ *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. I Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1910*, Kraków 1910, s. 103; *Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1899*, Kraków 1899, s. 80. W XIX w. na egzaminach wstępnych z matematyki wymagano jedynie znajomości czterech podstawowych działań arytmetycznych na liczbach całkowitych. Wybrane zarządzenia austriackie: *Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Kultus und Unterricht*, Wiedeń 1870, s. 173; wybrane zarządzenia pruskie: Ludwig Wiese, *Verordnungen und Gesetze für höheren Schulen in Preussen*, Verlag von Wiegandt und Grieben, Berlin 1867, s. 276; *Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und der höheren Bürgerschulen*, Berlin 1859, s. 6; wybrane zarządzenia dla szkół z polskim językiem

Świadectwa maturalne uzyskane w szkołach realnych dawały bardzo podobne uprawnienia do świadectw gimnazjalnych. Umożliwiały rozpoczęcie studiów na świeckich wydziałach uniwersyteckich (to znaczy, że absolwenci szkół realnych nie mogli rozpocząć studiów teologicznych), z uwzględnieniem następujących zastrzeżeń:

słuchacze wydziału filozoficznego, którzy ukończyli gimnazjum realne, a chcą zdawać egzamin nauczycielski z filozofii, filologii klasycznej, z języka francuskiego, z historii, lub zdawać rygoroza (doktorat) z klasycznej filologii (archeologii), historii, lub filozofii mogą być dopuszczeni do tych egzaminów tylko wtedy, jeżeli przynajmniej dwa lata przedtem uzupełnili egzamin dojrzałości z języka greckiego w zakresie przepisany dla gimnazjów klasycznych⁴¹.

Dawały również możliwość rozpoczęcia nauki na kierunkach technicznych, w „szkole rolniczo-leśnej” (*Bodenkultur*) w Wiedniu, w akademii weterynarii i na kierunkach farmaceutycznych.

Porównajmy zatem całe systemy kształcenia w gimnazjach i szkołach realnych. W gimnazjach głównymi przedmiotami były: łacina, greka, język polski, język niemiecki, geografia, matematyka, historia naturalna, historia, fizyka, logika, psychologia, religia; do tego dochodziły jeszcze przedmioty nadobowiązkowe, takie jak historia Polski, język francuski, język rosyjski, rysunki, śpiew, gimnastyka i kaligrafia⁴². W szkołach realnych wachlarz przedmiotów był uboższy: łacina, język polski, język niemiecki, język francuski, geografia, historia, matematyka, historia naturalna, fizyka, chemia, geometria i rysunki geometryczne (inaczej: geometria wykreślna), rysunki odręczne, kaligrafia, gimnastyka, język rosyjski. Oznacza to, że gimnazja były szkołami dającymi bardziej wszechstronne wykształcenie. Wprawdzie matematyki nauczano tam w węższym zakresie, ale – jak się okazuje – mogły one lepiej nawet przygotować uczniów do studiów uniwersyteckich w zakresie matematyki. Zwrócił na to uwagę Leon Jeśmanowicz:

W 1933 r. zostałem przyjęty na studia matematyczne, oczywiście bez żadnych egzaminów wstępnych, lecz za to z dość znaczną, jak na moją kieszeń, opłatą. Z piątką na maturze i z bogatą praktyką korepetytorską byłem przekonany, że jestem znakomicie przygotowany do studiów wyższych, lecz

wykładowym: *Plan nauk szkół departamentowych 1812 roku*, § 8; *Sprawozdanie c.k. Rady szkolnej krajowej o stanie szkół średnich galicyjskich w latach szkolnych 1875–1883*, Lwów 1885, cz. 2, s. 72–73.

⁴¹ *Sprawozdanie X. C.K. Dyrekcyi Gimnazjum IV. (Realnego) w Krakowie za rok szkolny 1910/11*, Kraków 1911, s. 93–94.

⁴² Zob. np. *VI. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1907*, Kraków 1907, s. 30–41.

pierwszy trymestr wyprowadził mnie z błędu. Okazało się, że jedynie absolwenci gimnazjów typu matematyczno-przyrodniczego mieli ułatwiony start, natomiast absolwenci gimnazjów humanistycznych, do których należałem, błędzili przez dłuższy czas, jak we mgle. Muszę jednak dodać, że po pewnym czasie sytuacja uległa nieoczekiwanej zmianie; to właśnie „realiści” wkrótce znaleźli się w ogonie. Wykształcenie humanistyczne (i nawet klasyczne), bazujące na dokładnej znajomości budowy języka łacińskiego, w jakimś sensie lepiej przygotowało ucznia do studiów matematycznych⁴³.

Najprawdopodobniej to właśnie większa wszechstronność nauczania gimnazjalnego była powodem posłania Banacha do gimnazjum, a nie szkoły realnej⁴⁴.

1.3. Zakres i poziom nauczania matematyki w IV Gimnazjum w Krakowie. Nauczyciele

Kolejną kwestią związaną z IV Gimnazjum w Krakowie, która została skrytykowana w literaturze, był poziom nauczania matematyki: „Matematyki nauczali ludzie nie zawsze kompetentni. Banach we wspomnieniach o gimnazjum źle wyrażał się o poziomie i sposobie nauczania ulubionego przedmiotu”⁴⁵.

Spójrzmy do programów nauczania matematyki w klasach, do których uczęszczał Stefan Banach od roku szkolnego 1902/1903 do roku 1909/1910:

Klasa 1 ^a	Zagadnienia: System dziesiętny. Liczby rzymskie. Cztery działania arytmetyczne na liczbach mianowanych i niemianowanych. System metryczny. Podzielność liczb i ich rozkład na czynniki proste. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność liczb. Ułamki zwykłe. Podstawowe pojęcia geometryczne: linia prosta, koło, kąt. Trójkąty (do przystawiania). (3 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Jerzy Smoleński^b (zastępca nauczyciela). Podręczniki^c: <i>Podręcznik arytmetyki i początków algebry w czterech częściach dla uczniów klas niższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji</i> Mariana Baranieckiego (cz. 1–2)^d; <i>Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich</i> Franza Močnika (cz. 1)^e.
Klasa 2 ^f	Zagadnienia: Zamiana ułamków zwykłych na dziesiętne i odwrotnie. Stosunki i proporcje. Procenty. Reguła trzech prosta. Osie symetrii. Przystawianie trójkątów wraz z zastosowaniami. Najważniejsze własności koła, czworoboków i wieloboków. (3 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Roman Gutwiński^g (profesor). Podręczniki^h: <i>Podręcznik arytmetyki i początków algebry w czterech częściach dla uczniów klas niższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji</i> Mariana Baranieckiego (cz. 1–2); <i>Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich</i> Franza Močnika (cz. 1).

⁴³ Leon Jeśmanowicz, *Wspomnienia o matematykach wileńskich*, „Wiadomości Matematyczne” 1971, t. 12, nr 2, s. 312.

⁴⁴ Również sam Stefan Banach bardziej cenił wykształcenie gimnazjalne niż realne (zob. punkt 2.4. niniejszego artykułu).

⁴⁵ Roman Kałuża, *Stefan Banach*, dz. cyt., s. 16.

Klasa 3 ⁱ	Zagadnienia: Cztery działania arytmetyczne na liczbach niemianowanych całkowitych i ułamkowych. Potęgi i pierwiastki drugiego stopnia. Porównanie, przekształcanie i podział figur płaskich. Obliczanie pól powierzchni figur. Twierdzenie Pitagorasa. Podobieństwo figur płaskich. (3 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Roman Gutwińskiⁱ. Podręczniki^k: <i>Początki arytmetyki i algebry dla niższych klas szkół średnich</i> Kaspra Brzostowicza (cz. 2)^l; <i>Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich</i> Franza Moćnika (cz. 2)^m.
Klasa 4 ⁿ	Zagadnienia: Równania pierwszego stopnia z jedną i więcej niewiadomymi. Równania drugiego i trzeciego stopnia z jedną i więcej niewiadomymi. Równania drugiego i trzeciego stopnia o dwóch niewiadomych. Potęgi i pierwiastki trzeciego stopnia. Reguła trzech składana. Reguła spółki. Stereometria. (3 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Kamil Kraft^o. Podręczniki^p: <i>Początki arytmetyki i algebry dla niższych klas szkół średnich</i> Kaspra Brzostowicza (cz. 2); <i>Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich</i> Franza Moćnika (cz. 2).
Klasa 5 ^q	Zagadnienia: Podzielność liczb. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność. Układy liczbowe. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Stosunki i proporcje. Równania pierwszego stopnia. Planimetria. (4 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Kamil Kraft. Podręczniki^r: <i>Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych</i> Placyda Dziwińskiego^s; <i>Geometria dla klas wyższych szkół średnich</i> Franza Moćnika^t.
Klasa 6 ^u	Zagadnienia: Potęgi, pierwiastki, logarytmy. Równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą. Stereometria. Trygonometria do rozwiązywania trójkątów prostokątnych łącznie. (3 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Kamil Kraft. Podręczniki^v: <i>Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych</i> Placyda Dziwińskiego; <i>Geometria dla klas wyższych szkół średnich</i> Franza Moćnika.
Klasa 7 ^w	Zagadnienia: Równania kwadratowe i wykładnicze. Szeregi. Rachunek procentu składanego. Trygonometria. Geometria analityczna na płaszczyźnie. (3 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Antoni Zmora^x. Podręczniki^y: <i>Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych</i> Placyda Dziwińskiego; <i>Geometria dla klas wyższych szkół średnich</i> Franza Moćnika; <i>Zbiór zadań matematycznych</i> Ignacego Kranza^z.
Klasa 8 ^{aa}	Zagadnienia: Geometria analityczna. Powtórzenie materiału klas wyższych. (2 godziny tygodniowo) Nauczyciel: Stanisław Ziobrowski^{bb}. Podręczniki^{cc}: <i>Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych</i> Placyda Dziwińskiego; <i>Geometria dla klas wyższych szkół średnich</i> Franza Moćnika; <i>Zbiór zadań matematycznych</i> Ignacego Kranza.

^a II. Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV w Krakowie za rok szkolny 1903, Kraków 1903, s. 18, 22.

^b Jerzy Smoleński – geolog, geograf, od 1920 roku profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. W IV Gimnazjum w Krakowie uczył też języka łacińskiego i historii naturalnej.

^c I. Sprawozdanie Dyrekcji C.K. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1902, Kraków 1902, s. 59.

^d Marian Baraniecki, *Podręcznik arytmetyki i początków algebry w czterech częściach dla uczniów klas niższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji*, Kraków 1894, cz. 1–2.

^e Franz Moćnik, *Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich*, przeł. Grzegorz Maryniak, Lwów 1895, cz. 1.

^f III. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1904*, Kraków 1904, s. 41.

^g Roman Gutwiński – botanik i algolog, współtwórca polskiej algologii. Do IV Gimnazjum został przeniesiony z Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie. Był członkiem Komisji Fizjograficznej krakowskiej Akademii Umiejętności, zawiadowcą gabinetu historii naturalnej. W roku szkolnym 1903/1904 uczył historii naturalnej w klasach pierwszej, drugiej, trzeciej i szóstej oraz matematyki w klasie drugiej.

^h II. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV w Krakowie za rok szkolny 1903*, Kraków 1903, s. 37–38.

ⁱ IV. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1905*, Kraków 1905, s. 47.

^j Archiwum Narodowe w Krakowie, zespół: IV Państwowe Liceum i Gimnazjum im. Henryka Sienkiewicza w Krakowie, sygn. 29/1434/4.

^k III. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1904*, Kraków 1904, s. 58.

^l Kasper Brzostowicz, *Początki arytmetyki i algebry dla niższych klas szkół średnich*, Sanok 1896, cz. 2.

^m Franz Močnik, *Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich*, Lwów 1902, cz. 2.

ⁿ V. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1906*, Kraków 1906, s. 20, 30.

^o Kamil Kraft (1873–1945) – doktor wszech nauk lekarskich. Swoją karierę nauczycielską rozpoczął w II Szkole Realnej w Krakowie (V. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1906*, Kraków 1906, s. 22–23). W roku szkolnym 1905/1906 został przeniesiony do IV Gimnazjum w Krakowie, gdzie uczył matematyki i fizyki. Jednocześnie był asystentem Katedry Fizyki Doświadczalnej na Uniwersytecie Jagiellońskim (Bronisław Średniawa, *Władysław Natanson (1864–1937). Fizyk, który wyprzedził swoją epokę (w sześćdziesięciolecie śmierci i setną rocznicę publikacji pracy „O prawach zjawisk nieodwracalnych”)*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 1997, t. 42, nr 2, s. 11). Kierownikiem tej katedry był wówczas Władysław Natanson (1864–1937) – jeden z najwybitniejszych polskich fizyków rozważanego okresu, uważany za prekursora termodynamiki procesów nieodwracalnych. Kamil Kraft w Katedrze Fizyki Doświadczalnej zajmował się teorią względności Einsteina. W latach 1911–1912 opublikował z tego zakresu pięć artykułów naukowych w „Bulletin International de l’Académie des Sciences de Cracovie, Classe des sciences mathématiques et naturelles, serie A”. Dotyczyły one równań Maxwella i współczynników ogólnej transformacji Lorentza. Trzy z tych artykułów Władysław Natanson zreferował w trakcie posiedzeń Akademii Umiejętności w Krakowie: *O całkowaniu bezpośrednim typowych form różniczkowych wektorów czasowoprzestrzennych*, *O wyrażeniu całkowem wektorów elektromagnetycznych, wprowadzonych przez Minkowskiego do elektrodynamiki poruszających się ciał materialnych* i *O pewnej tożsamości w wektorowej analizie czterowymiarowej i o jej zastosowaniu do elektrodynamiki* (zob. „Kosmos” 1911, t. 36, nr 10–12, s. 1146, 1150, 1153; Bronisław Średniawa, *Władysław Natanson (1864–1937)*, dz. cyt., s. 11; tenże, *Recepcja szczególnej i ogólnej teorii względności w Polsce*, [w:] *Recepcja w Polsce nowych kierunków i teorii naukowych*, red. Adam Strzałkowski, Kraków 2001, s. 223–243). W IV Gimnazjum w Krakowie pracował aż do przejścia na emeryturę, co miało miejsce 31 października 1931 r. (*Sprawozdanie XIV. (XXXI). Dyrekcji Państwowego Gimnazjum IV. im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1931/1932*, Kraków 1932, s. 23). Był członkiem Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych i Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Mikołaja Kopernika (*Spis członków Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika w r. 1910*, „Kosmos” 1911, t. 36, nr 1–2, s. 156). Wraz ze Stanisławem Ziobrowskim (i innymi) przygotował projekt reformy polskich szkół średnich (zob. Kamil Kraft i in., *Nasza szkoła średnia – krytyka jej podstaw i konieczność reformy (cz. 1)*, „Muzeum” 1906, t. 22, nr 1, 1906, s. 191–214; Kamil Kraft i in., *Nasza szkoła średnia – krytyka jej podstaw i konieczność reformy (cz. 2)*, „Muzeum” 1906, t. 22, nr 2, s. 92–145).

^p IV. *Sprawozdanie Dyrekcji c. k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1905*, Kraków 1905, s. 64.

^q VI. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1907*, Kraków 1907, s. 26, 35–36.

^r V. *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1906*, Kraków 1906, s. 48.

^s Placyd Dziwiński, *Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych*, Związkowa Drukarnia, Lwów 1891. Placyd Dziwiński (1851–1936), przygotowując podręcznik *Zasady algebry...*, był profesorem Szkoły Politechnicznej we Lwowie. Swoją karierę zawodową rozpoczął jako asystent w Katedrze Matematyki tejże uczelni (1874) i nauczyciel w Szkole Realnej we Lwowie (1875), a później w Szkole Realnej w Jarosławiu (1876) (Julian Samójiło, *Dziwiński Placyd Zasław*, [w:] *Polski słownik biograficzny*, red. Władysław Konopczyński i in., Wrocław–Warszawa–Kraków 1935–2020, t. 6, nr 26, s. 184–185).

^t Franz Močnik, *Geometria dla klas wyższych szkół średnich*, Lwów 1906.

^u VII. *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908*, Kraków 1908, s. 46, 55.

^v VI. *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1907*, Kraków 1907, s. 51.

^w VIII. *Sprawozdanie c.k. Dyrekcyi Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908/9*, Kraków 1909, s. 45, 56.

^x Antoni Zmora pracował w IV Gimnazjum w Krakowie jedynie w roku szkolnym 1908/1909, na stanowisku zastępcy nauczyciela. 9 września 1909 r. został przeniesiony do Gimnazjum w Wadowicach (IX. *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1910*, Fundusz Naukowy Kraków 1910, s. 23), a rok później do Gimnazjum w Gorlicach (*Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum w Wadowicach za rok szkolny 1911*, Wadowice 1911, s. 18; *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum w Gorlicach za rok szkolny 1914*, Gorlice 1914, s. 61). Był tam nauczycielem głównie przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. W roku 1913/1914 rozpoczął pracę w Gimnazjum w Przemyślu i pozostał tam do końca swojej kariery zawodowej (po odzyskaniu przez Polskę niepodległości gimnazjum to nosiło nazwę: I Państwowe Gimnazjum im. Juliusza Słowackiego w Przemyślu) (*Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum z wykładowym językiem polskim w Przemyślu*, Przemyśl 1914, 1916–1918; *Sprawozdanie Dyrekcyi Państwowego Gimnazjum I. w Przemyślu*, Kuratorium Okręgu szk. Lwowskiego, Przemyśl 1921; *Sprawozdanie Dyrekcyi Państwowego Gimnazjum I. im. Juliusza Słowackiego w Przemyślu*, Przemyśl 1927–1931, 1933–1937). Był profesorem matematyki i fizyki, a także opiekował się pracownią fizyczną. Był też członkiem Towarzystwa Nauk w Przemyślu (*Wykaz członków*, „Rocznik Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Przemyślu” 1923, t. 4, s. 139).

^y VII. *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908*, Kraków 1908, s. 70.

^z Ignacy Kranz, *Zbiór zadań matematycznych. Podręcznik dla wyższych klas szkół średnich*, nakładem autora, Księgarnia S.A. Krzyżanowskiego, Kraków 1902. Ignacy Kranz (1854–1924) przygotowywał ten podręcznik, będąc nauczycielem w Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie.

^{aa} IX. *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1910*, Kraków 1910, s. 20, 32.

^{bb} Stanisław Ziobrowski (1861–1923) – absolwent Gimnazjum w Wadowicach i Uniwersytetu Jagiellońskiego (Józef Brzeziński, *Ś.p. Prof. Stanisław Ziobrowski*, „Ogrodnictwo” 1923, t. 19, s. 193), w roku 1884/1885 został mianowany asystentem Szkoły Politechnicznej we Lwowie, pracował w katedrze fizyki (*Mowa ustępującego rektora politechniki we Lwowie p. Niedźwiedziego przy otwarciu roku naukowego 1885/6*, „Czasopismo Techniczne” 1885, t. 3, nr 11, s. 134). Na początku lat dziewięćdziesiątych zrezygnował z tego stanowiska i poświęcił się nauczaniu matematyki i fizyki w szkołach średnich (Józef Brzeziński, dz. cyt., s. 193–194). Pracował w szkole realnej we Lwowie (*Ośmnaste sprawozdanie Dyrekcyi c.k. wyższej szkoły realnej we Lwowie za rok szkolny 1891*, Lwów 1891, s. 20) oraz gimnazjach w Stryju i Jaśle (*Dziewiętnaste sprawozdanie Dyrekcyi c.k. wyższej szkoły realnej we Lwowie za rok szkolny 1892*, Lwów 1892, s. 39; Józef Brzeziński, dz. cyt., s. 193–194). W 1902 roku został profesorem w IV Gimnazjum w Krakowie i pracował tam aż do śmierci (II. *Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV w Krakowie za rok szkolny 1903*, Kraków 1903). Był aktywnym działaczem Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych. Wraz z Kamilem Kraftem (i innymi) przygotował projekt reformy polskich szkół średnich (Stanisław Ziobrowski i in., *Nasza szkoła średnia... (cz. 1)*, dz. cyt.; Stanisław Ziobrowski i in., *Nasza szkoła średnia... (cz. 2)*, dz. cyt.). Był członkiem Towarzystwa Matematycznego w Krakowie (Józef Piórek, *Z protokołów Towarzystwa Matematycznego w Krakowie*, „Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie” 1989, t. 3, s. 6), Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Mikołaja Kopernika (*Spis członków polskiego Towarzystwa przyrodników imienia „Kopernika” w dniu 16 lutego 1891*, „Kosmos” 1891, t. 16, s. 44; *Spis członków „Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika” w dniu 19 lutego 1893*, „Kosmos” 1893, t. 18, s. 64) i wiceprezesem Towarzystwa Ogrodniczego w Krakowie (Józef Brzeziński, dz. cyt., s. 193–194). Pracował jako wykładowca kursów organizowanych przez Towarzystwo Ogrodnicze i brał czynny udział w wydawaniu czasopisma „Ogrodnictwo”, w którym publikowano artykuły naukowe i popularnonaukowe z zakresu ogrodnictwa (tamże). Pisał artykuły naukowe, na przykład *Nowy sposób oznaczania równoważnika wodnego naczyń termometrów* (*Dziewiętnaste sprawozdanie Dyrekcyi c.k. wyższej szkoły realnej we Lwowie za rok szkolny 1892*, Lwów 1892, s. 3–6).

^{cc} VIII. *Sprawozdanie c.k. Dyrekcyi Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908/9*, Kraków 1909, s. 69.

Powyższe programy nauczania obowiązywały we wszystkich gimnazjach galicyjskich w pierwszej dekadzie XX w., między innymi w Gimnazjum Świętej Anny⁴⁶.

Można przypuszczać, że programy nauczania matematyki w IV Gimnazjum w Krakowie w latach 1902–1910 były realizowane z dużą skrupulatnością. Wraz z początkiem roku szkolnego 1910/1911 IV Gimnazjum zostało przemianowane na Gimnazjum Realne⁴⁷, czyli szkołę o profilu matematyczno-przyrodniczym. W 1918 r. Gimnazjum Realnemu nadano imię Henryka Sienkiewicza⁴⁸. Aby zyskać miano Gimnazjum Realnego, szkoła musiała wcześniej, czyli przed 1910 r., sprostać wymogom ministerialnym, związanym z poziomem nauczania matematyki i nauk przyrodniczych, co sprawdzali specjalnie wydelegowani w tym celu wizytatorzy szkolni. Warto zaznaczyć, że już w 1908 r. dyrektor IV Gimnazjum i Rada Szkolna Krajowa podjęli próby zatrudnienia w szkole nowych matematyków. I tak rozporządzeniem z dnia 21 listopada 1908 r. mianowano na nauczyciela doktora Leona Chwistka, jednakże ten z powodu choroby nie mógł objąć stanowiska⁴⁹. W roku 1909/1910 zatrudniono Franciszka Leję (1885–1979)⁵⁰.

⁴⁶ W roku 1904/1905 w Wyższej Szkole Realnej w Krakowie tygodniowy wymiar godzinowy zajęć z matematyki, z podziałem na dwa przedmioty: „matematyka” oraz „geometria i rysunki geometryczne” (geometria wykreślna), był następujący: 3, 3+2, 3+2, 3+2, 4+3, 4+3, 4+2.

⁴⁷ *Sprawozdanie X. C.K. Dyrekcji Gimnazjum IV. (Realnego) w Krakowie za rok szkolny 1910/11*, Kraków 1911, s. 73.

⁴⁸ Gimnazjum Realne otrzymało imię Henryka Sienkiewicza dopiero po odzyskaniu przez Polskę niepodległości. „Po usunięciu z budynku szkolnego godła austriackiego a umieszczeniu godła Państwa Polskiego oraz po ozdobieniu sal szkolnych orłami polskimi odbyła się dn. 12 listopada uroczystość otwarcia nowej szkoły polskiej” (*Sprawozdanie I. (XVIII.) Dyrekcji Gimnazjum IV. Realnego im. Henryka Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1918/1919*, Kraków 1919, s. 3).

⁴⁹ *VIII. Sprawozdanie c.k. Dyrekcji Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908/9*, Kraków 1909, s. 47.

⁵⁰ *IX. Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1910*, Kraków 1910, s. 22. Rok później w sprawozdaniu szkolnym Franciszek Leja opublikował rozprawę *Pierwsze zasady geometrii nieeuklidesowej* (*Sprawozdanie X. c.k. Dyrekcji Gimnazjum IV. (Realnego) w Krakowie za rok szkolny 1910/11*, Kraków 1911, s. 1–38). 30 sierpnia 1911 r. Franciszek Leja został przeniesiony do Gimnazjum w Bochni (*Sprawozdanie XI. C.K. Dyrekcji Gimnazjum Realnego (IV) w Krakowie za rok szkolny 1911/12*, Kraków 1912, s. 47). Pomiędzy rokiem 1917/1918 a 1919/1920 w Gimnazjum Realnym został zatrudniony również Otton Nikodym (1887–1974) (*Sprawozdanie III (XX) Dyrekcji Gimnazjum IV. (Realnego) im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1920/1921*, Kraków 1921, s. 4). W 1927 r. jego miejsce zajął Jan Leśniak (*Sprawozdanie X. (XXVII.) Dyrekcji Państwowego Gimnazjum IV. im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1927/1928*, Kraków 1928, s. 33) – asystent Uniwersytetu Jagiellońskiego (prowadził tam zajęcia z matematyki). W 1928 r. do grona pedagogicznego dołączył Stanisław Zaremba (*Sprawozdanie XI. (XXVIII.) Dyrekcji Państwowego Gimnazjum IV. im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1928/1929*, Kraków 1929, s. 20).

Wszyscy nauczyciele, którzy uczyli Stefana Banacha matematyki w IV Gimnazjum w Krakowie, mieli wykształcenie w zakresie nauk matematyczno-przyrodniczych. Trudno przypuszczać, by nauczyciele szkoły przygotowującej się do przemiany w gimnazjum realne lekceważyli lekcje matematyki. Ponadto Kamil Kraft i Stanisław Ziobrowski byli wybitnymi pedagogami, zaangażowanymi w prace nad reformą nauczania przeznaczoną dla polskich szkół średnich. Wraz z siedmioma innymi członkami polskiego Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych w 1906 r. ogłosili projekt reformy, zatytułowany *Polska szkoła średnia – krytyka jej podstaw i konieczność reformy*⁵¹. Podstawą projektu było usunięcie z polskich szkół systemu nauczania wzorowanego na austriackim *Zarysie organizacyjnym* z 1849 r. i wprowadzenie polskiego systemu, dostosowanego do potrzeb polskiego społeczeństwa⁵². Największe zapotrzebowanie w narodzie polskim było wówczas na ludzi wykształconych w zakresie nauk matematyczno-przyrodniczych – biegłych w zastosowaniu ich w życiu codziennym, w gospodarce i przemyśle. W związku z tym w projekcie reformy szczególnie nacisk położono na nauczanie matematyki. Austriackiemu systemowi nauczania zarzucano przeładowanie materiału, to, że zadania są schematyczne, opierają się na standardowych algorytmach, a cała nauka arytmetyki bazuje na uzyskaniu mechanicznej wprawy w rachowaniu. W polskich szkołach planowano ograniczyć zakres omawianego materiału. Uważano, że należy uczyć podstaw, ale w taki sposób, by uczniowie je doskonale rozumieli i rozwiązywali zadania nie tylko schematyczne, lecz także wymagające myślenia logicznego i twórczego. Duży nacisk położono również na zadania powiązane z potrzebami życia codziennego. Zalecano pogładową naukę matematyki i stopniowe wprowadzanie trudności⁵³. I chociaż powyższy projekt nie został wprowadzony w życie⁵⁴, jego główne postulaty zostały uwzględnione w reformie wprowadzonej w Polsce tuż po odzyskaniu niepodległości.

Stefan Banach, krytykując nauczanie matematyki w IV Gimnazjum, najprawdopodobniej nie był rozczarowany poziomem nauczania matematyki tylko w tej szkole, ale podzielał opinie Kamila Krafta i Stanisława Ziobrowskiego, czyli krytykował system nauczania obowiązujący we wszystkich szkołach Galicji. Opinię

⁵¹ Kamil Kraft i in., *Nasza szkoła średnia... (cz. 1)*, dz. cyt.; Kamil Kraft i in., *Nasza szkoła średnia... (cz. 2)*, dz. cyt.

⁵² Projekt ten był częścią działań związanych z próbami zreformowania polskich szkół. Wzorowano się wówczas na reformach szkolnictwa średniego w Europie, nadających szkołom średnim charakter utylitarny i demokratyczny. W poszukiwaniu wzorów szkoły narodowej sięgano do dorobku polskiej myśli pedagogicznej, w tym zarządzeń Komisji Edukacji Narodowej (zob. Janina Chodakowska, *Udział Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych w walce o polską szkołę średnią w Galicji w latach 1884–1914*, „Rozprawy z Dziejów Oświaty” 1984, t. 26, s. 141–172).

⁵³ Wszystkie te postulaty spełniały podręczniki, których autorem bądź współautorem był Stefan Banach.

⁵⁴ Janina Chodakowska, dz. cyt., s. 170–171; Bolesław Kielski, *Szkolnictwo w Polsce, jego postęp i główne zagadnienia*, „Oświata i wychowanie” 1929, t. 5, s. 461–475.

tę potwierdza fakt, że w przygotowywanych przez siebie, począwszy od 1923 r., podręcznikach szkolnych, uwzględnił większość postulatów projektu ogłoszonego w 1906 r. przez KRAFTA, ZIOMBROWSKIEGO i innych.

2. Dlaczego Stefan Banach przygotowywał podręczniki szkolne?

Po ukończeniu szkoły średniej Banach wyjechał do Lwowa, gdzie studiował mechanikę na tamtejszej Politechnice⁵⁵. Aby się utrzymać, udzielał korepetycji. Pieniądze, które w ten sposób zarabiał, nie zawsze wystarczały mu na uiszczenie opłaty semestralnej, dlatego dorabiał również w inny sposób – był statystą w operze⁵⁶. Przez cztery lata studiów we Lwowie zaliczył tylko połowę egzaminów i uzyskał tak zwany poldypłom.

Latem 1914 r. Banach wrócił do Krakowa, gdzie rozpoczął pracę w przedsiębiorstwie budującym drogi⁵⁷. Dzięki egzaminowi złożonemu na Politechnice Lwowskiej powierzono mu stanowisko, w którym nadzorował pracę niewielkich grup robotników. Jednocześnie uczęszczał na wykłady Stanisława ZAREMBY (1863–1942), prowadzone na uniwersytecie w Krakowie. Brali w nich udział również Witold WILKOŚ (1891–1941), z którym Banach chodził do jednej klasy w IV Gimnazjum w Krakowie, i OTTON NIKODYM.

Z Wilkoszem i Nikodymem Banach prowadził długie rozmowy o matematyce. Podczas jednej z tych rozmów podszedł do nich Hugo STEINHAUS. Rozmawiali wówczas o mierze Lebesgue'a⁵⁸. Miało to miejsce w 1916 r. na krakowskich Plantach. Był to przełomowy moment w życiu Banacha. STEINHAUS dostrzegł jego geniusz matematyczny. Niedługo później, dzięki pomocy STEINHAUSA, zaproponowano Banachowi asystenturę na Politechnice Lwowskiej. Od tego momentu jego kariera naukowa potoczyła się błyskawicznie. W 1921 r. uzyskał tytuł doktora, w kwietniu 1922 r. habilitował się⁵⁹, a trzy miesiące później został profesorem nadzwyczajnym Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Jeszcze w tym samym roku został kierownikiem II Katedry Matematyki Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Jana Kazimierza⁶⁰. Miał wtedy trzydzieści lat i był

⁵⁵ Wyjaśnienie, dlaczego Banach wybrał Politechnikę, przedstawił Andrzej TUROWICZ: „Banach powiedział mi – wspomina Andrzej Turowicz – że kiedy zdali z Wilkoszem maturę, byli przekonani, że w tak rozbudowanej matematyce nic się nie da już zrobić. Stąd Banach zapisał się później na Politechnikę Lwowską, a nie na uniwersytet” (Zofia Pawlikowska-Brożek, dz. cyt., s. 103).

⁵⁶ Piotr Hajłasz, *Stefan Banach o swoim ojcu*, „Delta” 1992, nr 1; Zob. <http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/pdf/o-banachu/hajlasz92.pdf> [dostęp 15.03.2020].

⁵⁷ W trakcie pierwszej wojny światowej Banach nie został powołany do wojska ze względu na wadę wzroku i leworęczność.

⁵⁸ Hugo STEINHAUS, *Wspomnienia i zapiski*, Wrocław 2010, s. 93.

⁵⁹ Jego rozprawa habilitacyjna *Sur le problème de mesure* została opublikowana w *Fundamenta Mathematicae* 1923, t. 4, s. 66–89.

⁶⁰ Szczegóły związane z naukowymi osiągnięciami Banacha z tego okresu można znaleźć w: Roman KAŁUŻA, *The Life of Stefan Banach*, dz. cyt.

w miejscu, które dla większości naukowców jest zwieńczeniem kariery naukowej. W 1927 r. został profesorem zwyczajnym⁶¹.

2.1. Zwyczaje Stefana Banacha

Stefan Banach był profesorem, który wylamywał się z ówczesnego wyobrażenia naukowca. Jego syn, Stefan Banach junior⁶², wspominał go następująco:

Pamiętam, jak kiedyś przyszedł do gimnazjum na wywiadówkę. Moi koledzy byli zdziwieni, że nie ma on brody do pasa i że nie jest trzęsącym się staruszkiem. Takie były wówczas wyobrażenia o tym, jak powinien wyglądać profesor uniwersytetu. A on przeciwnie, był młodym człowiekiem łamiącym różne przyjęte formy. W latach 30. było nie do pomyślenia, aby wyjść na ulicę w koszuli *à la* Słowacki, to znaczy rozpiętej pod szyją i z szeroko rozłożonym kołnierzykiem. Trzeba było mieć koszulę zapiętą pod szyją i mocno zaciągnięty krawat. Pod marynarką obowiązkowo musiała być kamizelka. Trzeba było też mieć rękawiczki, jeśli nie założone, to przynajmniej trzeba było trzymać je w ręku. Ojciec złamał tę modę. Pamiętam, jak na przykład kiedyś wyszedł na ulicę w niemodnej wówczas koszuli z krótkim rękawem i z laską w ręku⁶³.

To odejście od stereotypów było też widoczne w sposobie pracy Banacha. Banach nie lubił pracować w swoim gabinecie ani w bibliotece. Uważał, że równie dobrym, a nawet lepszym miejscem do pracy jest kawiarnia. Szybko przekonał do tego cały kwiat lwowskiej matematyki. Początkowo spotkania matematyków odbywały się w kawiarni Roma, a później w kawiarni Szkockiej. Kawiarnia Roma była miejscem spotkań literatów i wojskowych. Kawiarnia Szkocka miała bardziej zróżnicowaną klientelę – bywali w niej dziennikarze, radiowcy, handlarze bydła, studenci i profesorowie. Spotkania w kawiarniach odbywały się prawie codziennie. Najczęściej uczestniczyli w nich Władysław Stożek oraz współpracownicy Banacha: Stanisław Ulam (1909–1984), Stanisław Mazur (1905–1981), Władysław Orlicz (1903–1990), Hugo Steinhaus (1887–1972), Józef Schreier (1909–1943), Herman Auerbach (1903–1942), Juliusz Paweł Schauder (1899–1943), Samuel Eilenberg (1913–1998), Stanisław Ruziewicz (1889–1941), Meier „Maks” Eidelheit (1910–1943), Marek Kac (1914–1984), Władysław Nikliborc (1889–1948). Bywali też goście z Warszawy – między innymi Karol Borsuk (1905–1982) czy Waław Sierpiński (1882–1969).

Banach, otoczony tam gronem kolegów i uczniów, w niczym nie przypominał profesora-pedanta, który boi się uronić coś ze swojego dosto-

⁶¹ Hugo Steinhaus, *Stefan Banach*, „Nauka Polska” 1960, t. 8, nr 4, s. 155.

⁶² Stefan Banach junior (1922–1999) – doktor nauk medycznych, kardiochirurg w Akademii Medycznej w Warszawie.

⁶³ Piotr Hajłasz, dz. cyt.

jeństwa. Stworzył on nowy sposób pracy naukowej, rozmowa i dyskusja przy stoliku kawiarnianym, prowadzona bez autorytetu profesorskiego za strony mistrza i bez obawy zblamowania się ze strony ucznia, poparta argumentami pisanymi ołówkiem na płycie stolika lub na poderwanej serwecie⁶⁴.

Dyskusje naukowe w kawiarniach odbywały się przy miejscowym jedzeniu, kawie i alkoholu, najczęściej winie i koniaku⁶⁵. Bardzo prawdopodobne jest, że Banach często finansował kawiarnianą współpracę. Jego młodych kolegów nie byłoby na to stać⁶⁶.

Banach nie prowadził wystawnego życia. Jeden miesiąc wakacji zawsze spędzał w Karpatach Wschodnich. Poza tym rzadko wyjeżdżał na wczasy. Bardzo lubił mecze Polonii lwowskiej, chętnie chodził też do kina na filmy kowbojskie⁶⁷. Jak wspominał Hugo Steinhaus, Banach nie był przyzwyczajony do wygod i nie potrzebował komfortu⁶⁸. Pensja profesorska powinna mu być wystarczyć do tego, by spokojnie i godnie żyć. Było jednak inaczej. Zamiłowanie Banacha do życia kawiarnianego, spotkań przy kieliszku w gospodach i szynkach⁶⁹ oraz zupełny brak mieszczańskiej oszczędności i regularności w sprawach codziennych wpędziły go w bardzo duże długi.

2.2. Sytuacja finansowa Stefana Banacha

W 1922 r. Stefan Banach był profesorem nadzwyczajnym Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. W tym roku zasadnicza pensja profesora nadzwyczajnego wynosiła 2 600 marek. Była to pensja bardzo niska, porównywalna z płacami robotników fizycznych. Do pensji zasadniczej dochodził jeszcze dodatek za wysługę lat – od 2 574 do 5 790 marek, oraz dodatek naukowy – od 1 287 do 2 895 marek⁷⁰.

W 1923 r., gdy walutą był już złoty, pensja profesora nadzwyczajnego wahała się między 480 a 720 złotymi. Dodatkowe dochody otrzymywano na przykład

⁶⁴ Hugo Steinhaus, *Stefan Banach*, Archiwum Polskiej Akademii Nauk, sygn. III–204/29, k. 3.

⁶⁵ Małgorzata Przeniosło, *Dochody nauczycieli państwowych szkół akademickich w II Rzeczypospolitej (na przykładzie matematyków)*, „Roczniki Dziejów Społecznych i Gospodarczych” 2008, t. 68, s. 54.

⁶⁶ Od 1923 r. pensja podstawowa adiunktów wynosiła 270–405 złotych, asystentów starszych – 180–270 złotych, asystentów młodszych – 120–180 złotych. Od 1933 r. adiunkci zarabiali 335–450 złotych, asystenci starsi – 260–450 zł, asystenci młodszy – 210 zł, zastępcy asystentów – 160 zł (tamże, s. 42–43).

⁶⁷ Piotr Hajłasz, dz. cyt.

⁶⁸ Hugo Steinhaus, *Stefan Banach*, „Nauka Polska” 1960, t. 8, nr 4, s. 155.

⁶⁹ „Miał [Banach] swoisty tryb życia. Czas wolny od wykładów (a miał ich wyjątkowo dużo) spędzał niemal całkowicie w kawiarni czy restauracji” (Kazimierz Kuratowski, *Notatki do autobiografii*, Warszawa 1981, s. 88; Roman Duda, *Lwowska szkoła matematyczna*, dz. cyt, s. 86).

⁷⁰ Małgorzata Przeniosło, *Dochody nauczycieli...*, dz. cyt., s. 39–41.

z tytułu prowadzenia egzaminów – Banach za okres od października 1926 do lutego 1927 r. otrzymał wówczas 558 złotych⁷¹.

W 1927 r. Banach był już profesorem zwyczajnym z pensją od około 600 do 900 złotych. W 1933 r. uległa ona podwyższeniu do 1 000 zł miesięcznie. W porównaniu z innymi grupami społecznymi były to już dość wysokie zarobki⁷². Stefan Banach prócz podstawowej pensji otrzymywał jeszcze pieniądze za wykłady zlecone w wysokości 500 złotych⁷³.

Banach przez wszystkie lata działalności naukowej pobierał honoraria za publikacje prac naukowych. Przykładowo: „Fundamenta Mathematicae” w 1922 r. wypłacało honorarium autorskie w wysokości 1 000 marek za arkusz, czyli za dwie prace, które Banach opublikował w trzecim tomie „Fundamenta Mathematicae”⁷⁴ (łącznie 54 strony), otrzymał 3 375 marek⁷⁵. Przekraczało to jego ówczesne miesięczne wynagrodzenie na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie.

Tak wyglądały zarobki Banacha. Spójrzmy teraz na jego wydatki. Wiadomo, że lubił spędzać czas w kawiarni. Przykładowe pozycje z menu polskich restauracji z lat trzydziestych XX w. były następujące⁷⁶:

Dania obiadowe:

- sandacz po polsku – 3 złote;
- sznycel cielęcy – 3 złote;
- kotlet z drobiu – 3 złote 50 groszy.

Napoje:

- kawa – 75 groszy;
- piwo jasne – 1 złoty 20 groszy;
- koniak Habermuscha Marteau – kieliszek – 1 złoty, butelka – 20 złotych;
- koniak Hennessy VO – kieliszek – 3 zł, butelka – 50 złotych.

⁷¹ Tamże, s. 43.

⁷² Zob. tamże, s. 62.

⁷³ Małgorzata Przeniosło, *Droga naukowa...*, dz. cyt. s. 47.

⁷⁴ Stefan Banach, *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*, „Fundamenta Mathematicae” 1922, t. 3, s. 128–132; tenże, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales (Thèse de doctorat)*, „Fundamenta Mathematicae” 1922, t. 3, s. 133–181.

⁷⁵ List Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruzewicza, Warszawa, dnia 11.01.1922, [w:] Witold Wiśniewski, *Listy Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruzewicza*, „Wiadomości Matematyczne” 2004, t. 40, s. 139–168. W 1922 r. egzemplarz „Fundamenta Mathematicae” kosztował 1 000 marek. W tym czasopiśmie Banach opublikował łącznie szesnaście artykułów. Z korespondencji Kazimierza Kuratowskiego i Bronisława Knastera, którą odbyli między 1945 a 1949 r., wynika, że przed 1945 r. honoraria autorskie w „Fundamenta Mathematicae” były niższe niż te wypłacane na przykład przez Czytelnika – jedno z najpopularniejszych wydawnictw w tym czasie (Archiwum Polskiej Akademii Nauk, sygn. III–252/36). Rozpoczęto wtedy dyskusję o zwiększeniu honorariów.

⁷⁶ Menu Restauracji „Victoria”, ul. Jasna 26, Warszawa 1935.

Gdyby Banach dwadzieścia razy w miesiącu kupował w restauracji obiad za 3 złote, dwie kawy i butelkę koniaku za 20 złotych, to wydałby miesięcznie 505 złotych, co stanowiłoby około jedną trzecią jego stałych miesięcznych dochodów. Nie jest to sytuacja, która wywoływałaby zagrożenie finansowe. Ale jeśli w spotkaniach w kawiarni uczestniczyło kilku matematyków – a jak wiemy, spotkania te mogły trwać nawet kilkanaście godzin⁷⁷ – i Banach decydował się fundować kolegom posiłki i trunki, to bez trudu rachunki w kawiarni mogły pokryć całą jego ówczesną miesięczną pensję. Do tego należy jeszcze doliczyć koszty zakupu papierosów – Banach od młodości palił trzy paczki papierosów dziennie, czyli każdego dnia wydawał około 3 złote na papierosy. Miesięcznie dawało to około 90 złotych⁷⁸.

Stefan Banach niemal od początku pracy na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie zaciągał pożyczki pracownicze. Motywował je koniecznością leczenia między innymi nerwicy, której nabawiła się jego żona⁷⁹ (warto zaznaczyć, że ze wspomnień przyjaciół rodziny nie wynika, by miała ona problemy ze zdrowiem). Trudności finansowe narastały lawinowo.

W 1933 r. Banach był redaktorem lwowskiego czasopisma „*Studia Mathematica*”. We wspomnieniach Hugona Steinhausa można znaleźć informację, że „Banach tak zagrabił finanse «*Studia Mathematica*», że potem dopiero wyrobiona przez Bartla subwencja koncernu naftowego Małopolska⁸⁰ i subwencja śp. mojego [Steinhausa] ojca⁸¹ przeprowadziły w roku 1933 to wydawnictwo przez kryzys”⁸². Rok później miała miejsce inna nieprzyjemna sytuacja, związana z pożyczkami, które Banach uzyskał ze Związku Profesorów Szkół Akademickich. Skarbnikiem tej organizacji był przyjaciel Banacha, profesor Politechniki Lwowskiej, Włodzimierz Stożek (1883–1941). Stożek często udzielał pożyczek bez pokwitowania. W rezultacie w kasie Związku brakowało 11 tysięcy złotych, z czego 8 tysięcy złotych wynosiły długi Banacha. Włodzimierz Stożek w konsekwencji przeprowadzonego dochodzenia dyscyplinarnego na trzy lata stracił prawo posługiwania się godnościami akademickimi. Musiał też zwrócić całą sumę, ponieważ Banach nie czuł się w obowiązku oddać swojej pożyczki. Sytuacja ta wstrząsnęła środowiskiem akademickim, a naukowcy lwowscy obwiniali Banacha za problemy Stożka⁸³. Od 1933 r. do Rektoratu Uniwersytetu

⁷⁷ Roman Duda, *Lwowska szkoła matematyczna*, dz. cyt., s. 72.

⁷⁸ Cena jednego papierosa wynosiła wówczas około 5 groszy, a jednego cygara – około 30 groszy. *Rozporządzenie Ministra Skarbu z dnia 31 października 1935 r. o zmianie rozporządzenia z dnia 30 października 1933 r. o sprzedaży wyrobów tytoniowych*, [w:] *Dziennik Urzędowy Ministerstwa Skarbu*, 1935, nr 32, s. 715].

⁷⁹ Małgorzata Przeniosło, *Droga naukowa...*, dz. cyt., s. 47.

⁸⁰ Koncern naftowy wsparł wydanie „*Studia Mathematica*” kwotą 1 500 złotych.

⁸¹ Subwencja wynosiła 1 000 złotych.

⁸² Hugo Steinhaus, *Wspomnienia...*, dz. cyt., s. 132.

⁸³ Małgorzata Przeniosło, *Droga naukowa...*, dz. cyt., s. 47–48.

Jana Kazimierza regularnie napływały listy od wierzycieli, komornika i z sądu w sprawie długów Banacha, ich egzekucji i zajęcia części poborów.

Trudna sytuacja materialna zmusiła Banacha do szukania zajęć, które pozwoliłyby mu zarobić dodatkowe pieniądze. Przełamał swoją niechęć do pisania⁸⁴ i zajął się przygotowywaniem podręczników szkolnych i akademickich.

2.3. Zapotrzebowanie na podręczniki

Po odzyskaniu przez Polskę niepodległości, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego ogłosiło *Program naukowy szkoły średniej*⁸⁵, w którym przedstawiło nową organizację polskiego szkolnictwa średniego.

Tab. 3. Organizacja szkół przed reformą z 1919 r. i po niej (linią zostały podkreślone klasy, dla których Stefan Banach przygotował podręczniki)

Organizacja szkół								
Przed reformą z 1919 r.		Okres przejściowy		Po wdrożeniu reformy z 1919 r.				
szkoła powszechna	1 klasa	szkoła powszechna	1 klasa	szkoła powszechna	1 klasa			
	2 klasa		2 klasa		2 klasa			
	3 klasa		3 klasa		3 klasa			
1 klasa	niższa szkoła średnia	<u>1 klasa</u>	4 klasa					
2 klasa		<u>2 klasa</u>	<u>5 klasa</u>					
3 klasa		<u>3 klasa</u>	<u>6 klasa</u>					
szkoła średnia	4 klasa	wyższa szkoła średnia	1 klasa		<u>7 klasa</u>	szkoła średnia	<u>1 klasa</u>	
	5 klasa		2 klasa	<u>2 klasa</u>				
	6 klasa		3 klasa	<u>3 klasa</u>				
	7 klasa		4 klasa	<u>4 klasa</u>				
	8 klasa		5 klasa	5 klasa				

Reforma obejmowała przekształcenie dotychczasowych trzyletnich szkół powszechnych i ośmioletnich szkół średnich (gimnazjów i szkół realnych) w siedmioletnie szkoły powszechne i pięcioletnie szkoły średnie. Wdrażanie reformy zajęło kilkanaście lat. W tym czasie na ziemiach polskich funkcjonowały szkoły starego i nowego typu.

⁸⁴ „Formułowanie myśli na piśmie sprawiało mu duże trudności. Pisał swoje manuskrypty na luźnych kartkach wyrwanych z zeszytów; gdy trzeba było zmienić część tekstu, wycinał zbędne miejsca i podklejał resztę czystą kartką, na której pisał nową wersję. Gdyby nie pomoc przyjaciół i asystentów pierwsze prace Banacha nigdy nie były by dotarły do drukarni” (Hugo Steinhaus, *Stefan Banach*, Archiwum Polskiej Akademii Nauk, sygn. III–204/29, k. 5).

⁸⁵ *Program naukowy szkoły średniej. Projekt wypracowany przez Sekcję szkolnictwa średniego*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1919.

2.4. Poglądy Stefana Banacha dotyczące nauczania matematyki

W przedmowie do polskiego wydania książki *Od tabliczki do różniczki* Banach napisał: „Matematyka oddaje wielkie usługi dla obronności kraju. Tylko państwa, które pielęgnują matematykę mogą być silne i potężne”⁸⁶, które pokrywa się z jedną z podstawowych tez umieszczonych w projekcie reformy przygotowanym między innymi przez Kamila Krafta i Stanisława Ziobrowskiego. To przypuszczenie zdaje się też potwierdzać opinia Banacha o nauczaniu matematyki w szkołach średnich, którą wyraził już jako profesor we Lwowie: „matematyka jest narzędziem zanadto ostrem, żeby mogli go używać niedojrzali chłopcy, [...] jej walor kształcący w szkole średniej jest przez to mniejszy, niż nauk humanistycznych”⁸⁷. Uważał, że tłumaczenie zdań polskich na łacinę to dla dzieci doskonały trening logicznego i precyzyjnego myślenia. Był też zdania, że należy uczyć podstaw, ale w taki sposób, by uczniowie doskonale je rozumieli.

3. Podręczniki przygotowane przez Stefana Banacha

Stefan Banach napisał łącznie dziesięć podręczników szkolnych (siedem wspólnie z Wacławem Sierpińskim i Włodzimierzem Stożkiem, jeden wspólnie z Włodzimierzem Stożkiem, dwa samodzielnie):

1. Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla klasy I szkół średnich*, Lwów 1923, 1929.
2. Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla klasy II szkół średnich*, Lwów–Warszawa 1930.
3. Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla klasy III szkół średnich*, Lwów–Warszawa 1931.
4. Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, Lwów 1933, Lwów–Warszawa 1937.
5. Stefan Banach, Włodzimierz Stożek, *Algebra dla II klasy gimnazjalnej*, Lwów 1934.

⁸⁶ Egmont Colerus, *Od tabliczki do różniczki. Matematyka dla wszystkich*, przeł. Antoni Nykliński, Lwów 1938, s. V.

⁸⁷ Hugo Steinhaus, *Stefan Banach*, Archiwum Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, sygn. III – 204/29, k. 4. Opinię Stefana Banacha na temat nauczania matematyki w szkołach średnich podzielał również Hugo Steinhaus. W cytowanym dokumencie Steinhaus wspominał, że Banach miał nieoczekiwane spostrzeżenia nawet w utartych kwestiach. Twierdził na przykład, że „pogląd Kroneckera na liczby całkowite, jako twory naturalne i zupełnie odpowiadające zbiorom skończonym, z którymi mamy do czynienia, zawodzi, gdy chodzi o zbiory bardzo liczne. Np. zdanie, że Nowy York ma 11 milionów 785 438 mieszkańców nie odpowiada żadnemu faktowi realnemu w naiwnym znaczeniu. Nie ma żadnych prostych środków do stwierdzenia takiego faktu, a chcąc dokładnie wyjaśnić sens takiego zdania, trzeba je zaopatrzyć tylema kautelami i hipotezami, że przestaje się różnić od skomplikowanych twierdzeń, używających liczb niewymiernych lub zespolonych” (Archiwum Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, sygn. III–204/29, k. 4).

6. Stefan Banach, *Algebra dla III klasy gimnazjalnej*, Lwów 1935.
Po drugiej wojnie światowej podręcznik ten został przedrukowany jako:
Stefan Banach, *Algebra dla II klasy gimnazjalnej*, Wrocław–Warszawa 1947.
7. Stefan Banach, *Algebra dla IV klasy gimnazjalnej*, Lwów 1936, Jerozolima 1944.
Po drugiej wojnie światowej ten podręcznik został przedrukowany jako:
Stefan Banach, *Algebra dla III klasy gimnazjalnej*, Bari 1946, Edynburg 1946, Wrocław 1946.
8. Stefan Banach, Waław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla V klasy szkoły powszechnej*, Lwów–Warszawa 1933.
9. Stefan Banach, Waław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla VI klasy szkoły powszechnej*, Lwów 1933, Edynburg 1945.
10. Stefan Banach, Waław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, Lwów–Warszawa 1935⁸⁸.

Podręczniki Banacha były bardzo popularne. Używano ich między innymi w XII Gimnazjum im. Stanisława Szczepanowskiego we Lwowie⁸⁹, Gimnazjum Koedukacyjnym Humanistycznym im. ks. Grzegorza Piramowicza w Dziśnie⁹⁰, Gimnazjum w Bielsku⁹¹ oraz Gimnazjum im. Jana Kasprowicza w Inowrocławiu⁹². Wydawano je w dziesiątkach tysięcy egzemplarzy.

3.1. Korzyści finansowe płynące z przygotowywania podręczników

Cena jednego egzemplarza *Algebry dla III klasy gimnazjalnej* wydanej w 1935 r. wynosiła 1 złoty 10 groszy. Nakład nie jest znany, ale można oszacować go na około 50 tysięcy egzemplarzy⁹³. Honorarium autorskie od jednego arkusza wydawniczego książki, wypłacane przez Książnicę-Atlas, wynosiło wówczas ok. 100 złotych⁹⁴. Podręcznik liczył 97 stron, co daje około siedem

⁸⁸ Zakres materiału umieszczonego w podręcznikach dla klas pierwszej, drugiej i trzeciej szkoły średniej był niemalże identyczny jak w podręcznikach dla klas piątej, szóstej i siódmej szkoły powszechnej. Materiał zawarty w podręczniku do klasy siódmej szkoły powszechnej w dużej mierze pokrywał się z tym umieszczonym w podręczniku dla klasy pierwszej gimnazjum.

⁸⁹ Zob. *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum XII im. Stan. Szczepanowskiego we Lwowie za rok szkolny 1928/29*, Lwów 1928.

⁹⁰ Zob. *VII-me Sprawozdanie Państwowego Gimnazjum Koedukacyjnego Humanistycznego im. ks. Grzegorza Piramowicza w Dziśnie za lata szkolne 1930/31–1932/33*, Wilno 1933.

⁹¹ *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum w Bielsku*, Bielsko 1929, 1930, 1931.

⁹² *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Jana Kasprowicza w Inowrocławiu za lata szkolne 1932/33–1935/36*, Poznań 1936.

⁹³ Zob. *Zapiski dyr. Piątka z lat międzywojennych a następnie Katalog wpływających do Ks.-Atl. rękopisów w l. 1945–50*, Archiwum Polskiej Akademii Nauk, sygn. I–28, s. 9, 10.

⁹⁴ Honorarium autorskie od jednego arkusza wydawniczego podręcznika zostało wyznaczone na podstawie danych umieszczonych w: *List Kazimierza Kuratowskiego do Bronisława Knastera datowany na Sylwestra 1945 r.*, Archiwum Polskiej Akademii Nauk, sygn. III–252/36; *Zapiski dyr. Piątka...*, dz. cyt., s. 6.

arkuszy wydawniczych⁹⁵. Oznacza to, że pierwsza część honorarium autorskiego Banacha wynosiła 700 złotych. Do tego należało doliczyć honorarium autorskie związane z wielkością nakładu. Obliczano je wg wzoru: $15\%^{96} \cdot (\text{nakład}) \cdot (\text{cena jednego egzemplarza podręcznika})$. W tym przypadku dawało to 8 250 złotych, czyli łącznie honorarium autorskie od jednego podręcznika było równe blisko 9 000 złotych. Przypomnijmy, że miesięczna zasadnicza pensja Banacha na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie wynosiła w tym czasie 1 000 złotych. Przygotowywanie podręczników okazało się tym samym zajęciem bardzo intratnym.

3.2. Jak wyglądało przygotowywanie podręczników?

Część podręczników szkolnych była przygotowywana przez Banacha z większą starannością, a inne z mniejszą. Do tych pierwszych należały podręczniki, które Banach napisał wspólnie z Wacławem Sierpińskim i Włodzimierzem Stożkiem. Matematycy przygotowywali je podczas wakacji, które spędzali zazwyczaj w Zakopanem. Siadali na werandzie jednego z tamtejszych domków⁹⁷ i „wypróbowywali” zadania na młodej Alinie Dawidowiczowej, która była wówczas uczennicą krakowskiego Gimnazjum Królowej Jadwigi⁹⁸.

Banach, Sierpiński i Stożek napisali wspólnie siedem podręczników. Pierwsze wydanie podręcznika do algebry dla klasy drugiej gimnazjum (1934) zostało przygotowane już tylko przez Banacha i Stożka. Zrobili to w tajemnicy przed Sierpińskim. Sierpiński poczuł się tym bardzo dotknięty⁹⁹. Wydaje się, że powodem mogły tu być względy finansowe. Mniejsza liczba autorów wpływała na

⁹⁵ Orientacyjna liczba arkuszy została wyznaczona na podstawie danych umieszczonych w liście Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruziewicza z dnia 11.1.1922 (Witold Więśław, *Listy Wacława Sierpińskiego...*, dz. cyt., s. 139–168).

⁹⁶ *Zapiski dyr. Piątka...*, dz. cyt., s. 9.

⁹⁷ Gościli wówczas w posiadłości Leona Chwistka.

⁹⁸ Alina Dawidowicz, *Wspomnienia o Leonie Chwistku, Hugonie Steinhausie i Włodzimierzu Stożku*, „Wiadomości Matematyczne” 1981, nr 2, s. 238; Alina Dawidowiczowa (z Chwistków), *Zeschnięte liście i kwiat...*, dz. cyt., s. 85–93.

⁹⁹ Małgorzata Przeniosło, *Droga naukowa...*, dz. cyt., s. 48. Sierpiński był osobą bardzo życzliwą Banachowi. Za pośrednictwem swojego ucznia Stanisława Ruziewicza (1889–1941) zaproponował Banachowi opublikowanie rozprawy doktorskiej w „Fundamenta Mathematicae” (list Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruziewicza z dnia 24.12.1920, [w:] Witold Więśław, *Listy Wacława Sierpińskiego...*, dz. cyt.). Warto tu wyjaśnić, że Banach nie lubił pisać listów i często na nie nie odpowiadał, dlatego w sprawę zaangażowany został Ruziewicz, który w tym czasie mieszkał we Lwowie i współpracował z Banachem. Sierpiński cieszył się, że praca Banacha zyskała uznanie i podał mu listę adresową matematyków, do których powinien przesłać odbitki (list Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruziewicza z dnia 29.04.1922, [w:] Witold Więśław, *Listy Wacława Sierpińskiego...*, dz. cyt.). Pośredniczył w kontaktowaniu Banacha z zagranicznymi matematykami, zaangażował się też w załatwienie Banachowi stażu naukowego w Paryżu (list Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruziewicza z dnia 26.11.1921, [w:] Witold Więśław, *Listy Wacława Sierpińskiego...*, dz. cyt.).

większe honoraria autorskie. Drugie wydanie tego podręcznika miało już jednego autora: Stefana Banacha. Stożek zaangażował się wówczas w przygotowywanie podręczników szkolnych z Władysławem Nikliborcem¹⁰⁰.

W przygotowaniu podręcznika z algebry do klasy czwartej gimnazjum brał udział Kazimierz Szałajko, młodszy asystent w katedrze kierowanej przez Banacha. Pracę nad podręcznikiem opisał następująco:

Działo się to w czerwcu 1936 roku. [...] profesor zwrócił się do mnie o pomoc w przygotowaniu tego podręcznika do druku. [...] Miałem przeprowadzać korektę maszynopisu sporządzanego z rękopisów profesora, uporządkować i powklejać rysunki oraz być łącznikiem między autorem a Książnicą–Atlas, która to spółka akcyjna finansowała przygotowanie podręcznika, zapewniała autorowi honorarium i miała ów podręcznik wydać w przypadku zatwierdzenia go przez specjalną komisję ministerialną. Maszynopis w ośmiu egzemplarzach miał być dostarczony do Ministerstwa do godz. 8-ej w poniedziałek 1 lipca. Tymczasem na niecały tydzień przed terminem gotowych było zaledwie kilka stron rękopisu. I wówczas zaczęła się gorączkowa praca, która bez przerwy trwała dzień i noc od czwartku do niedzieli przed tym terminem. Byli w tym zaangażowani oczywiście profesor, docent Auerbach, kreślarz i ja. I termin został dotrzymany: w niedzielę przed południem zaniósłem do wydawnictwa ostatnie strony rękopisu. A w Książnicy chyba cały personel był w pogotowiu, a więc nie tylko maszynistka, ale i introligatorzy, kalkulatorzy, buchalterzy i jeszcze inni. Ostatnie strony maszynopisu były gotowe ok. godz. 3-ej po południu. [...] zarobiłem prawie trzykrotną moją miesięczną pensję¹⁰¹, którą wypłaciło mi wydawnictwo na odręcznie napisane przez Profesora zlecenie. A teraz pewne refleksje. Z jednej strony ogromna sprawność i pracowitość Profesora w przelewaniu na papier swoich myśli, z drugiej niewątpliwie wysoki autorytet, jakim cieszył się profesor Banach, skoro wydawnictwo nie obawiało się inwestować w przedsięwzięcie dużych kapitałów¹⁰².

¹⁰⁰ Władysław Nikliborc, Włodzimierz Stożek, *Algebra dla III klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1935; ciż, *Algebra dla IV klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1936; ciż, *Arytmetyka i geometria dla IV klasy szkół powszechnych I stopnia. Kurs B*, Lwów–Warszawa 1937; ciż, *Arytmetyka i geometria dla IV klasy szkół powszechnych I stopnia. Kurs A*, Lwów–Warszawa 1938; ciż, *Arytmetyka i geometria dla IV klasy szkół powszechnych I stopnia. Kurs C*, Lwów–Warszawa 1938.

¹⁰¹ Zgodnie z danymi podanymi przez Małgorzatę Przeniosło (*Dochody nauczycieli...*, dz. cyt., s. 42–43) od 1933 r. miesięczna pensja asystentów młodszych wynosiła 210 złotych, czyli Szałajko na przygotowaniu podręcznika mógł zarobić około 630 złotych.

¹⁰² Kazimierz Szałajko, *Wspomnienia lwowskie*, „Wiadomości Matematyczne” 1904, t. 30, s. 255.

4. Podręczniki Banacha kontra podręczniki, z których korzystał w IV Gimnazjum w Krakowie

Wiele zagadnień związanych z nauczaniem matematyki w szkołach powszechnych i średnich po odzyskaniu przez Polskę niepodległości zostało uregulowane przez odpowiednie zarządzenia Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Udzielono przykładowo szczegółowych wytycznych związanych z wprowadzaniem pojęcia liczby do szkół¹⁰³. Ministerstwo zalecało również: „Przy traktowaniu równań 2go stopnia nauczyciel unikać będzie równań, prowadzących do pierwiastków urojonych”¹⁰⁴. Zbiorem liczbowym, w którym pracowano w polskich szkołach średnich po 1919 r., był zbiór liczb rzeczywistych. Wcześniej, w całej drugiej połowie XIX w., we wszystkich szkołach średnich na ziemiach polskich pracowano w liczbach zespolonych. Zmiana zbioru liczbowego w istotny sposób wpłynęła na sposób omawiania równań¹⁰⁵.

4.1. Równania

Stefan Banach, będąc uczniem IV Gimnazjum w Krakowie, poznawał kolejno: równania pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia z jedną i więcej niewiadomymi, równania logarytmiczne, trygonometryczne i wykładnicze. Wszystkie te równania rozwiązywał w zbiorze liczb zespolonych. Bazował wówczas na podręcznikach: *Początki arytmetyki i algebry dla niższych klas szkół średnich* Kaspra Brzostowicza (cz. 2) i *Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych* Placyda Dziwińskiego; korzystał też ze zbioru zadań Ignacego Kranza¹⁰⁶.

W podręczniku Placyda Dziwińskiego można znaleźć następującą uwagę:

Niech będzie dane równanie niezupełne $ax^2 + c = 0$, natenczas otrzymamy stąd $ax^2 = -c$, przeto $x^2 = -\frac{c}{a}$, czyli kładąc $-\frac{c}{a} = q$, równanie $x^2 = q$, a stąd $x = \pm\sqrt{q} \cdot [\dots]$

¹⁰³ Zob. Karolina Karpińska, *Concrete Numbers in Stefan Banach's Mathematics School Textbooks* (zgłoszony do *Historia Mathematica*).

¹⁰⁴ *Program nauki w szkołach powszechnych siedmioklasowych. Rachunki z geometrią*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Drukarnia Rola, Warszawa 1920, s. 56.

¹⁰⁵ „Przywiązanie do dziedziny rzeczywistej” było wówczas również cechą charakterystyczną badań naukowych prowadzonych przez polskich matematyków. Współcześni historycy matematyki oceniają to jako „niewątpliwą słabość” polskiej szkoły matematycznej okresu międzywojennego (Roman Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Warszawa 2019, s. 215).

¹⁰⁶ Ignacy Kranz, *Zbiór zadań matematycznych...* Zbiór zadań Ignacego Kranza jeszcze w 1905 r. był jedynym matematycznym podręcznikiem polskim zawierającym wyłącznie przykłady i zagadnienia z matematyki dla szkół średnich (Samuel Blader, *Rozwiązania zadań matematycznych zawartych w „Zbiorze” prof. I. Kranza*, Stanisławów 1905, s. 1).

Jeżeli q jest liczbą dodatnią, natenczas oba pierwiastki są rzeczywiste, jeden dodatni, drugi ujemny, jeżeli zaś q jest liczbą ujemną, natenczas oba pierwiastki są urojone, różniące się tylko znakami¹⁰⁷.

Rozwiązując zadania ćwiczeniowe¹⁰⁸, Dziwiński między innymi wyznaczył pierwiastki (rzeczywiste i zespolone) równań postaci $x^3 = a$ oraz $x^4 = a$. Dopuszczał umieszczanie 0 w mianowniku ułamka¹⁰⁹. Wyrażeniu typu $\frac{1}{0}$ przypisywał wartość nieskończenie wielką (∞)¹¹⁰, a wyrażeniu $\frac{1}{\infty}$ wartość 0¹¹¹. Obie zależności wykorzystywał w rozwiązywaniu równań. W *Rozwiązaniach zadań matematycznych zawartych w „Zbiorze” prof. I. Kranza* autorstwa Samuela Bladera¹¹² można znaleźć rozwiązanie następującego równania¹¹³:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x} \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{7}{x^2}}}.$$

Przeprowadzając rozwiązanie, obie strony powyższego równania Blader najpierw podniósł do kwadratu:

$$-\frac{2}{ax} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{7}{x^2}}.$$

Następnie stwierdził, że „ponieważ obie strony dadzą się podzielić przez $\frac{1}{x}$ przeto $\frac{1}{x} = 0$; $x_1 = \infty$ ”¹¹⁴.

Podnosząc obie strony ostatniego równania do kwadratu i wyznaczając x , otrzymał drugie rozwiązanie: $x_2 = 2a$.

Zakres liczb i przyjęte wartości dla wyrażeń typu $\frac{1}{0}$ oraz $\frac{1}{\infty}$, powodowały, że Dziwiński, Kranz i Blader właściwie nie musieli rozważać ograniczeń na dziedzinę równania. I tego nie robili (choć za każdym razem po rozwiązaniu równania dokonywali sprawdzenia, czy dla otrzymanych wyników wyjściowe równanie jest prawdziwe).

Jedyną wątpliwość w kwestii wyznaczania dziedziny budzą tutaj równania logarytmiczne. Dziwiński podał definicję logarytmu dla zasady będącej liczbą rzeczywistą dodatnią (nie uczynił założenia, że zasada ma być różna od 1) i liczby logarytmowanej będącej liczbą rzeczywistą nieujemną – logarytmem liczby

¹⁰⁷ Placyd Dziwiński, *Zasady algebry...*, dz. cyt., s. 247.

¹⁰⁸ Tamże, s. 263–265.

¹⁰⁹ Tamże, s. 253–254.

¹¹⁰ Tamże.

¹¹¹ Samuel Blader, dz. cyt., s. 58.

¹¹² Samuel Blader, dz. cyt.

¹¹³ Ignacy Kranz, *Zbiór zadań matematycznych...*, dz. cyt., s. 25; Samuel Blader, dz. cyt., s. 58.

¹¹⁴ W tym miejscu u Bladera pojawia się 0: „ $x_1 = \infty$ ”, co jest ewidentnym błędem w druku.

a przy podstawie b jest wykładnik potęgi c , do której należy podnieść b , aby otrzymać a . Wyjaśnił również, że: „Logarytm zera dla jakiegokolwiek zasady całkowitej jest równy liczbie ujemnej nieskończenie wielkiej”¹¹⁵. Logarytmów liczb ujemnych i liczb zespolonych już nie zdefiniował – uznał, że wykracza to poza ramy tematyczne podręcznika.

W zbiorze zadań Kranza¹¹⁶ można znaleźć równanie: $\log_{x+3}(x+2) = 2$, które rozwiązano u Bladera w sposób następujący: „Z określenia co to jest logarytm wynika: $(x+3)^2 = x+2$, stąd: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ”¹¹⁷. Podstawiając pierwsze i drugie rozwiązanie do lewej strony wyjściowego równania, otrzymujemy kolejno: $\log_{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$ oraz $\log_{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$. Definicje podane przez Dziwińskiego nie obejmowały sytuacji, w której zasada logarytmu była liczbą zespoloną. Definicji dla liczb zespolonych nie podano również u Kranza i Bladera. W związku z tym, że logarytm o zasadzie zespolonej (z liczby zespolonej) definiuje się w sposób zupełnie inny niż logarytm liczby rzeczywistej, wykonanie prawidłowego sprawdzenia poprawności rozwiązania tego równania było dla uczniów niemożliwe. Jeżeli autorzy szukali rozwiązań w zbiorze liczb zespolonych, to powinni wykorzystywać definicję logarytmu dla liczb zespolonych.

Stefan Banach w swoich podręcznikach – zgodnie z zaleceniem ministerialnym – pracował wyłącznie w zbiorze liczb rzeczywistych. Równania kwadratowe pojawiły się u niego dopiero w podręczniku do algebry dla klasy czwartej gimnazjum¹¹⁸. Omawiając zasady rozwiązywania równań kwadratowych, stwierdził, że gdy wyróżnik równania kwadratowego jest dodatni, to równanie ma dwa rozwiązania, jeżeli jest równy 0, to ma jedno rozwiązanie, a gdy jest mniejszy od 0, to równanie kwadratowe „nie ma rozwiązań”¹¹⁹.

Teza „równanie nie ma rozwiązań” pojawiała się u Banacha dość często, ale ani razu nie zostało do niej dodane: w zbiorze liczb rzeczywistych. Zwróćmy uwagę na to, że „nie ma rozwiązań” i „nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych” są dwoma różnymi stwierdzeniami. Pierwsze z nich sugeruje, jakoby równanie w ogóle nie miało rozwiązań, a przecież wiemy, że takie równanie ma rozwiązania w zbiorze liczb zespolonych.

W dalszej części podręcznika Banach omówił równania niewymierne. Nie dopuszczał umieszczania 0 w mianowniku ułamka. W związku z tym równanie: $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x} \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{7}{x^2}}}$, które w zbiorze Kranza miało dwa rozwiązania, u Banacha miałyby tylko jedno rozwiązanie: $x_1 = 2a$.

¹¹⁵ Warto tutaj dodać, że dla będącej ułamkiem mniejszym od 1 i większym od 0 u Dziwińskiego zachodziła następująca zależność: $\log_0 0 = +\infty$ (Placyd Dziwiński, *Zasady algebry*..., dz. cyt., s. 231).

¹¹⁶ Ignacy Kranz, *Zbiór zadań matematycznych*..., dz. cyt., s. 27.

¹¹⁷ Samuel Blader, dz. cyt., s. 64.

¹¹⁸ Stefan Banach, *Algebra dla IV klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1936.

¹¹⁹ Tamże, s. 55.

Zmiana zakresu liczbowego z liczb zespolonych na liczby rzeczywiste, w którym rozwiązywano równania, spowodowała zmniejszenie liczby ich rozwiązań. Wykluczyła też możliwość wprowadzenia do nauczania szkolnego na przykład Zasadniczego Twierdzenia Algebry.

Warto zaznaczyć, że w podręczniku Placyda Dziwińskiego, z którego Banach uczył się w szkole średniej, umieszczono ogólne rozważania na temat rozwiązywania równań n -tego stopnia, a wśród nich, obok Zasadniczego Twierdzenia Algebry¹²⁰, między innymi twierdzenie Abela–Ruffiniego¹²¹. Rozważań tych nie było u Banacha. Nie omówił on też w swoich podręcznikach równań logarytmicznych i wykładniczych i nie wprowadził pojęcia logarytmu.

Sposób omawiania równań w szkołach średnich na ziemiach polskich został narzucony przez Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Chcąc, by jego podręczniki wdrożono do nauczania szkolnego, Banach musiał dostosować je do wymogów ministerialnych. Zdecydowanie ciekawsze jest zbadanie, w jaki sposób omawiał on kwestie, które nie były odgórnie ustalone przez rząd. Wprawdzie ministerstwo zalecało wprowadzenie w szkole podstawowych pojęć planimetrycznych w oparciu o stereometrię, nie podało jednak wytycznych dotyczących realizacji tego zagadnienia. W zarządzeniach nie określono również zakresu omawiania zagadnień z arytmetyki politycznej. Oba te zagadnienia zostaną w niniejszym artykule omówione w szerszym aspekcie, uwzględniającym ewolucję ich realizacji w szkołach średnich na ziemiach polskich. Przeprowadzona analiza pozwoli ustalić, w jakim stopniu rozwiązania proponowane przez Banacha były innowacyjne.

4.2. Czy kształtować uczniowskie intuicje geometryczne, rozpoczynając od planimetrii, czy od stereometrii?

Do końca XVIII w. kanon wiedzy matematycznej z zakresu geometrii, który uczniowie szkół średnich mieli opanować, stanowiły *Elementy* Euklidesa. Na dziele tym wzorowano również układ treści nauczania. Naturalne stało się, że wzorem Euklidesa naukę geometrii rozpoczynano od wprowadzenia pojęć planimetrycznych i dopiero po dokładnym omówieniu planimetrii przechodzono do stereometrii.

W XIX w. zaczęły pojawiać się pierwsze głosy, że lepsze efekty w zakresie kształtowania pojęć geometrycznych dałaby inna metodyka. Dzieci od najmłodszych lat bawią się klockami w kształcie sześciątów, prostopadłościątów i graniastosłupów. W tych kształtach są budynki mieszkalne, kostki do gry, pudełka prezentowe, książki i tym podobne. Kula również towarzyszy dzieciom na co dzień w postaci owoców czy piłek do gry. Słupy i filary budynków są w kształcie walców. Operowanie klockami w wymienionych kształtach jest dla dzieci czymś

¹²⁰ Placyd Dziwiński, dz. cyt., s. 371.

¹²¹ Tamże, s. 383.

zwyczajnym i naturalnym. Nie jest natomiast naturalne operowanie trójkątami czy kwadratami, bo są to obiekty abstrakcyjne, które w rzeczywistości nie istnieją samodzielnie. Nawet jeśli narysujemy kwadrat na kartce papieru, a później go wytniemy, to otrzymamy obiekt będący nie kwadratem, a graniastosłupem prawidłowym czworokątnym o wysokości równej grubości kartki. Kwadrat jest ścianą tego graniastosłupa. W świetle tych uwag niektórzy pedagodzy zalecali rozpoczynanie nauki geometrii od wprowadzenia podstawowych obiektów stereometrycznych, a dopiero na ich bazie – obiektów planimetrycznych.

Jednym z pionierów takiego podejścia do nauczania geometrii był Friedrich Fröbel (1782–1852) – niemiecki pedagog zajmujący się nauczaniem przedszkolnym. Fröbel opracował specjalny materiał dydaktyczny, który miał umożliwić dzieciom samodzielne zdobywanie wiedzy (w tym wiedzy geometrycznej) na bazie doświadczenia i rozszerzanie zasobu pojęć w sposób systematyczny i logicznie uporządkowany¹²². Materiał ten stanowiły zestawy zabawek. Pierwotnie było ich sześć i nazwano je „darami Fröbla”¹²³:

Dar 1: Sześć różnokolorowych piłek.

Dar 2: Pudełko mieszczące kulę, walec i sześcian.

Dar 3: Osiem jednakowych sześcianów, z których można ułożyć sześcian o dwa razy dłuższej krawędzi.

Dar 4: Osiem jednakowych prostopadłościanów, z których można ułożyć sześcian tak duży, jak w darze trzecim.

Dar 5 „to sześcian większy od poprzednich. Początkowo został podzielony dwoma cięciami poprzecznymi, a następnie górna jego warstwa została przecięta przekątną na dwie części, tworząc nowe układy klocków (trójganiaste połówki sześcianów)”¹²⁴.

Dar 6: Pudełko wypełnione płytkami mozaiki geometrycznej, w kształtach: trójkąty prostokątne równoramienne, trójkąty równoboczne, trójkąty różnoboczne.

Fröbel zalecał wprowadzanie „darów” do nauczania przedszkolnego sukcesywnie, począwszy od pierwszego, a skończywszy na szóstym, co oznaczało przechodzenie od operowania obiektami stereometrycznymi do operowania „modelami” obiektów planimetrycznych (płytki mozaiki).

Aby zbadać korzyści płynące z wdrażania „darów” do nauczania przedszkolnego, w 1837 r. Fröbel otworzył w Bad Blankenburg „zakład dla rozwijania zamiłowań dzieci i młodzieży do pracy”¹²⁵, któremu w 1840 r. nadał nazwę „ogródek

¹²² Wanda Bobrowska-Nowak, *Historia wychowania przedszkolnego*, Warszawa 1978, s. 120.

¹²³ Z biegiem lat liczba „darów Fröbla” została rozszerzona. Współcześnie wykorzystuje się w dydaktyce czternaście „darów”.

¹²⁴ Wanda Bobrowska-Nowak, dz. cyt., s. 122.

¹²⁵ Barbara Bilewicz-Kuźnia, *Dar zabawy. Metodyka i propozycje zajęć z dziećmi według założeń pedagogicznych Froebela*, Lublin 2014, s. 10.

przedszkolny”¹²⁶. Jego idea szybko rozprzestrzeniła się na inne kraje europejskie i Stany Zjednoczone. Pierwszy w Królestwie Polskim zakład przedszkolny wzorowany na freblowskich metodach pracy otwarto już w 1839 r.¹²⁷

Analizując programy nauczania i zarządzenia ministerialne obowiązujące w szkołach średnich na ziemiach polskich w XIX i na początku XX w., można zauważyć, że geometrię do cyklu edukacyjnego wprowadzano w różnych momentach. Jakkolwiek wprowadzenie egzaminów maturalnych, do którego doszło po raz pierwszy w 1788 r. w Prusach¹²⁸, spowodowało konieczność ujednolicenia programów nauczania w szkołach, był to proces długotrwały, trwający czasem nawet kilkadziesiąt lat. W szkołach funkcjonujących na ziemiach polskich, w zależności od okresu i terytorium, obowiązywały wówczas polskie, pruskie, rosyjskie albo austriackie zasady nauczania.

I tak u progu XIX w., w 1798 r., w szkołach warszawskich księży pijarów cykl edukacyjny obejmował sześć klas, z których najniższą była klasa pierwsza. W klasach trzeciej i czwartej omawiano planimetrię. Stereometrii w programie nauczania nie było w ogóle¹²⁹. W 1804 r. w Królewskim Gimnazjum w Poznaniu było sześć klas, z których najniższą była klasa szósta. Planimetrię wprowadzano tam w klasie czwartej, a stereometrię – w klasie drugiej¹³⁰. Tyle samo klas było w 1806 r. w Liceum Warszawskim – najniższą była tam klasa druga. Planimetrię wprowadzano w klasie trzeciej (w oparciu o podręcznik *Geometria dla Szkół Narodowych* Simona L’Huilliera), a program nauczania w ogóle nie przewidywał stereometrii¹³¹. W 1812 r., na mocy zarządzeń dla szkół departamentowych Księstwa Warszawskiego¹³², geometria po raz pierwszy znalazła się już w programach nauczania najniższej klasy. Naukę rozpoczynano od planimetrii, a dopiero w dwóch najwyższych klasach omawiano stereometrię.

W Gimnazjum Wołyńskim w Krzemieńcu w latach 1809, 1815, 1818 nauka rozpoczynała się w klasie czwartej (najniższą była klasa pierwsza) i toczyła się

¹²⁶ W 1870 r. powstało pierwsze przedszkole na ziemiach polskich prowadzone w duchu freblowskim (miało to miejsce w Warszawie) (tamże, s. 12).

¹²⁷ Wanda Bobrowska-Nowak, *Historia wychowania...*, dz. cyt., s. 140.

¹²⁸ Zob. Stanisław Domoradzki, Karolina Karpińska, *O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku*, „Antiquitates Mathematicae” 2017, t. 11, s. 157–201.

¹²⁹ *Popis Roczny z nauk dawanych w szkołach warszawskich XX. Scholarum Piarum odprawiony w miesiącu lipcu roku 1798*, Warszawa 1798. W 1810 r. w klasie piątej wykładano już geometrię sferyczną i podobnie było w kolejnych latach.

¹³⁰ *Doniesienie o nowouorganizowanem Krolewskim Gimnazjum w Poznaniu*, Dekier i Kompania, Poznań 1804.

¹³¹ *Na Publiczny Popis Uczniów Królewskiego Liceum Warszawskiego... zaprasza Prześwietną Publiczność... M. Samuel Bogumił Linde...*, Warszawa 1806.

¹³² *Plan nauk szkół departamentowych 1812 roku*, Warszawa 1812.

ściśle według *Elementów* Euklidesa¹³³. W Gimnazjach w Bydgoszczy¹³⁴ i Toruniu najniższa była wówczas klasa szósta, planimetrię wprowadzano w klasie czwartej, a dopiero w najwyższej klasie omawiano stereometrię.

Zgodnie z zarządzeniami z 1835 r. w gimnazjach Królestwa Polskiego było osiem klas, liczonych od najniższej pierwszej do najwyższej ósmej. Planimetrię wprowadzano w klasie drugiej, a stereometrię – w klasie czwartej¹³⁵. Zarządzenia z 1868 r. zalecały omawianie geometrii od klasy trzeciej. Jak świadczy pewien z pozoru mało istotny szczegół, to w nich po raz pierwszy zalecono, by planimetrię wprowadzać w oparciu o stereometrię¹³⁶. W programie nauczania przeznaczonym dla klasy trzeciej można było znaleźć uwagę: „Definicje: objętość, powierzchnia, linia, punkt. Przedmiot geometrii; linia prosta [...]”. Umieszczenie „objętości” tuż przed „powierzchnią”, a później „linią” i „punktem” świadczyło o tym, że pierwszymi obiektami omawianymi na geometrii były obiekty przestrzenne.

Przełom w nauczaniu geometrii przyniósł rok 1905. Zatwierdzono wówczas reformę nauczania przedmiotów matematyczno-przyrodniczych, przeznaczoną dla pruskich szkół średnich, której nadano nazwę: Program Merański. W ramach Programu Merańskiego bardzo dużą wagę przykładano do nauczania geometrii. Radzono, by naukę geometrii rozpoczynać od zapoznania uczniów z bryłami przestrzennymi. Ich analiza, dokonywana poprzez omawianie wierzchołków, krawędzi i ścian bocznych, dostarczała okazji do wprowadzenia pojęć: punktu, linii, płaszczyzny i figury płaskiej. Program Merański zalecał wprowadzenie abstrakcyjnych pojęć geometrycznych na bazie brył, z którymi uczniowie spotykali się na co dzień. Figury płaskie najpierw powinny być wprowadzane jako ograniczenia brył przestrzennych i dopiero później traktowane jak oddzielne obiekty matematyczne. Drugi ważny postulat Programu Merańskiego stanowiło wspólne podejście do planimetrii i stereometrii, które gwarantowało wprowadzanie podstawowych pojęć geometrycznych w sposób naturalny, zgodny z intuicją uczniów, pojawienie się nowych pojęć było bowiem w pełni uzasadnione.

Te dwa postulaty Programu Merańskiego uwzględnił w pełni *Program Gimnazjum Państwowego. Gimnazjum Niższe. Matematyka* (przedruk wyda-

¹³³ *Materye z Nauk w Gymnazium Wołyńskiem przez Przeciąg Roku Szkolnego wyłożonych*, Krzemieniec 1809, 1815, 1818. Zob. też: *Dokumenty Liceum Wołyńskiego w Krzemieńcu*, Biblioteka Narodowa, sygn. IV. 7785 t. 1.

¹³⁴ *Ueber einige Hindernisse und Förderungs-Mittel der Jugendbildung. Zur Ankündigung der den dritten und vierten October zu haltenden öffentlichen Prüfung der sammtlichen Classen des Gymnasiums zu Bromberg*, Andreas Friedrich Gruenauer, Bromberg 1823. *Programm des Königl. Gymnasiums zu Bromberg*, Bromberg 1864–1872.

¹³⁵ Archiwum Państwowe w Łodzi, zespół: Szkoła Powiatowa w Rawie, sygn. 12.

¹³⁶ *Программы преподавания учебных предметовъ въ мужскихъ гимназіяхъ и прогимназіяхъ Варшавскаго учебнаго округа, въ казенной типографіи НРІИ Варшавскомъ учебномъ округѣ*, Warszawa 1868, s. 37–53.

nia z r. 1919)¹³⁷ – jedno z pierwszych zarządzeń przygotowanych w odrodzonej Polsce. Realizacja postulatu równoległego omawiania pojęć planimetrycznych i stereometrycznych zgodnie z zarządzeniami obejmowała między innymi omówienie pól figur płaskich i sposobu obliczania objętości brył w klasie pierwszej¹³⁸.

Większość późniejszych polskich zarządzeń ministerialnych dość lakonicznie odnosiła się do metody wprowadzania pojęć planimetrycznych i stereometrycznych. *Program nauki w szkołach powszechnych siedmioklasowych. Rachunki z geometrią* geometrię umieszczał już w najniższej klasie pierwszej¹³⁹. Pierwsze zagadnienie obejmowało: „Odcinki. Koło (krążek). Pod, nad, obok, wyżej, niżej. Stosunek położenia. Kwadrat, prostokąt”¹⁴⁰. Dopiero w klasie trzeciej pojawiły się podstawowe obiekty stereometryczne: modele sześcianu, prostopadłościanu i „graniastosłupa kwadratowego”¹⁴¹. Tym samym nie ma tu odniesienia ani do metody wprowadzenia pojęć geometrycznych (oznacza to, że zaleca się metodę euklidesową), ani do równoległego omawiania obiektów planimetrycznych i stereometrycznych. Mimo że w zarządzeniach tych przedstawiono szczegółowe wskazówki metodyczne dla nauczycieli, a wśród nich na przykład wyjaśnienie, w jaki sposób należy wprowadzić pojęcie liczby do nauczania szkolnego, nie zamieszczono tam wskazówek związanych z wprowadzeniem do geometrii. Podobna sytuacja miała miejsce w innych zarządzeniach¹⁴².

Programy nauczania matematyki umieszczane w sprawozdaniach szkolnych i zarządzeniach ministerialnych często były pisane lapidarnie i hasłowo. Koncentrowały się one wokół zagadnień, które realizowano lub które powinno się realizować na zajęciach, podczas gdy samą metodykę pomijano. Warto zatem spojrzeć do najbardziej popularnych podręczników szkolnych z XIX i początku XX w. i sprawdzić, w jaki sposób autorzy dokonywali wprowadzenia do geometrii.

Jeden z ciekawszych, i niespotykanych w książkach wydawanych w późniejszych latach, wstępów do geometrii znaleźć można w części pierwszej *Geometrii*

¹³⁷ *Program Gimnazjum Państwowego. Gimnazjum Niższe. Matematyka (przedruk wydania z r. 1919)*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Książnica Polska Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych, Warszawa 1920.

¹³⁸ Tamże, s. 13.

¹³⁹ *Program nauki w szkołach powszechnych siedmioklasowych. Rachunki z geometrią*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1920.

¹⁴⁰ Tamże, s. 3.

¹⁴¹ Tamże, s. 6.

¹⁴² *Program Gimnazjum Państwowego. Wydział matematyczno-przyrodniczy*, Lwów 1931, s. 63. Tak samo było w zarządzeniach dla gimnazjów humanistycznych: *Program Gimnazjum Państwowego. Wydział humanistyczny*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1926; *Rozkład szczegółowy materiału naukowego z matematyki dla publicznych szkół powszechnych na klasę V, VI, VII*, Lwów 1934.

dla *Szkół Narodowych* Simona L'Huilliera¹⁴³, którą wykorzystywano w Liceum Warszawskim na początku XIX w. Rozważania geometryczne autor rozpoczął tutaj od wprowadzenia miary długości w terenie. Stwierdził, że może nią być na przykład jeden krok człowieka. Liczbę kroków, które należało wykonać, by dojść z jednego do drugiego miejsca, nazywał odległością między dwoma miejscami, a najkrótszą drogę w terenie, która prowadzi z jednego miejsca do drugiego – linią prostą. Końce tej linii, czyli miejsca, między którymi mierzono odległość, nazywał punktami. Autor nie posługiwał się tutaj pojęciem odcinka, ale w XIX w. było to jeszcze rzeczą naturalną – na wzór Euklidesa rozważano linie nieograniczone (dzisiejsze proste) i linie ograniczone (dzisiejsze odcinki). W dalszej części podręcznika autor zajął się kątami i kołem (figurą powstałą przez obrót linii wokół jednego jej końca). Dopiero po omówieniu tych zagadnień przeszedł do wielokątów. Definicje, które wprowadził, były czysto teoretyczne: trójkąt to „miejsce zakończone trzema liniami prostymi”¹⁴⁴, i tym podobne. Podstawowe obiekty przestrzenne L'Huillier wprowadził dopiero w części drugiej *Geometrii dla Szkół Narodowych*¹⁴⁵. Nie było tutaj zatem mowy ani o wprowadzeniu obiektów geometrycznych w oparciu o bryły stereometryczne, ani o równoczesnym omawianiu planimetrii i stereometrii.

U schyłku XVIII w. wydany został *Anfangsgründe der nothwendigsten Theile der Mathematik* Johanna Jacoba Eberta¹⁴⁶, który wykorzystywano na przykład w Gimnazjum w Toruniu w 1808 r.¹⁴⁷ W podręczniku tym można już znaleźć wprowadzenie do planimetrii bazujące na stereometrii. Autor wyjaśnił, że geometria jest częścią matematyki zajmującą się bryłami przestrzennymi, które mają długość, szerokość i grubość. Każda bryła ograniczona jest przez „powierzchnie” (które mają jedynie długość i szerokość); granice powierzchni nazywane są „liniami” (które mają jedynie długość); granice linii to „punkty”¹⁴⁸. Takie wprowadzenie znaleźć można w większości podręczników wydawanych w XIX w.¹⁴⁹ To, co wy-

¹⁴³ Simon L'Huillier, *Geometria dla Szkół Narodowych*, Warszawa 1780–1781, cz. 1.

¹⁴⁴ Tamże, s. 15.

¹⁴⁵ Simon L'Huillier, *Geometria dla Szkół Narodowych*, Warszawa 1780–1781, cz. 2.

¹⁴⁶ Johann Jacob Ebert, *Anfangsgründe der nothwendigsten Theile der Mathematik*, Leipzig 1787.

¹⁴⁷ Bolesław Pleśniarski, *Szkolnictwo Departamentu Bydgoskiego w okresie Księstwa Warszawskiego*, Toruń 1965, s. 173–176.

¹⁴⁸ Johann Jacob Ebert, dz. cyt., s. 187.

¹⁴⁹ Zob. Ludwig Kambly, *Die Elementar Mathematik*, Breslau 1876–1878, cz. 1: *Arithmetik und Algebra*, cz. 2: *Planimetrie*, cz. 3: *Ebene und Sphärische Trigonometrie*, cz. 4: *Stereometrie* – podręcznika używano między innymi w Gimnazjum w Toruniu (*Gymnasium mit Realschule I Ordnung zu Thorn*, Buchdruckerei von J. Buszczyński, Thorn 1878, s. 7) i Gimnazjum w Bydgoszczy (*Königliches Gymnasium in Bromberg*, Bromberg 1885, s. 9); Karl Koppe, *Anfangsgründe der reinen Mathematik für der Schul- und Selbst-Unterricht*, Essen 1852–1871, cz. 1: *Arithmetik und Algebra*, cz. 2: *Planimetrie*, cz. 3: *Stereometrie*, cz. 4: *Ebene Trigonometrie* – podręcznika używano między innymi w Szkole Realnej pierwszego stopnia w Toruniu (*Gymnasium mit Realschule...*, dz. cyt.)

różniało podręcznik Eberta, to dobitne podkreślenie, że bryły są obiektami rzeczywistymi, które znajdują się w otoczeniu człowieka, a powierzchnie, linie i punkty są obiektami abstrakcyjnymi, bo na świecie nie ma rzeczy, która miałaby długość i szerokość, ale nie miałaby grubości, podobnie jak nie istnieją rzeczy, które mają długość, a nie mają szerokości¹⁵⁰. Obiekty abstrakcyjne istnieją po to, by ułatwiać obliczenia związane z obiektami rzeczywistymi. Dlatego najpierw dokładnie omawia się obiekty abstrakcyjne (planimetria), by później wykorzystać tę wiedzę przy zajmowaniu się obiektami rzeczywistymi (stereometria). Po takim wstępie Ebert przeszedł do omówienia planimetrii, a następnie do stereometrii.

Oczywiście, w XIX w. wydawano również podręczniki, w których rozważania planimetryczne nie były poprzedzone stereometrycznym komentarzem o charakterze poglądowym, na przykład podręczniki: Ferdinanda Gustava Mehlera¹⁵¹ (wykorzystywany w Gimnazjum Realnym w Toruniu¹⁵²), Johanna Augusta Grunerta¹⁵³ (wykorzystywany w Progimnazjum w Wałczu, gdy nauczycielem był w nim Karl Weierstrass¹⁵⁴) czy Adriena-Marie Legendre'a¹⁵⁵.

Pod koniec XIX w. zaczęły pojawiać się podręczniki szkolne, które nazywano podręcznikami geometrii poglądowej. Jednym z najpopularniejszych podręczników tego typu w szkołach Galicji była *Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich* Franza Močnika (cz. 1)¹⁵⁶. Wykorzystywano go na przykład w Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie¹⁵⁷ i Gimnazjum w Samborze¹⁵⁸. Z tego podręcznika w IV Gimnazjum w Krakowie uczył się również Stefan Banach.

i Gimnazjum w Braniewie, gdy nauczycielem był tam Karl Weierstrass (1815–1897) (*Jahresbericht über das Königliche Katholische Gymnasium zu Braunsberg*, C. Heyne, Braniewo 1850, s. 22); Franz Močnik, *Początki geometrii*, przeł. Tomasz Sternal, Karol Wild, Lwów 1872 – podręcznik wykorzystywano między innymi w Gimnazjum Świętego Jacka (*Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum św. Jacka w Krakowie*, Kraków 1877, s. 52) i Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie (*Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie*, Kraków 1874, s. 89).

¹⁵⁰ Johann Jacob Ebert, *Anfangsgründe...*, dz. cyt., s. 188.

¹⁵¹ Ferdinand Gustav Mehler, *Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen*, Berlin 1869.

¹⁵² *Königliches Gymnasium mit Realgymnasium zu Thorn*, Buchdruckerei von Józef Buszczyński, Thorn 1885, s. 26.

¹⁵³ Johann August Grunert, *Lehrbuch der Mathematik für die mittlern Classen höherer Lehranstalten*, J. Wiesike, Brandenburg 1851.

¹⁵⁴ *Jahresbericht über das Königl. Progymnasium in Dt. Crone*, P. Garms, Deutsch Crone 1844, s. 13.

¹⁵⁵ Adrien-Marie Legendre, *Początki geometrii dla szkół powiatowych na klasę pierwszą*, przeł. Antoni Wyrwicz, Wilno 1825. Ten podręcznik zalecany był do użytku szkolnego zarządzeniami wydanymi w 1835 r. dla szkół obwodowych i gimnazjalnych Królestwa Polskiego (Archiwum Państwowe w Łodzi, zespół: Szkoła Powiatowa w Rawie, sygn. 12).

¹⁵⁶ Franz Močnik, *Geometria poglądowa...*, dz. cyt., cz. 1.

¹⁵⁷ *Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie*, Kraków 1900, s. 66.

¹⁵⁸ *Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum Arcyksiężn. Elżbiety w Samborze*, Sambor 1893.

Wstęp geometryczny Moćnik rozpoczął od omówienia sześcianu:

1. „Sześcian [...] zajmuje przestrzeń ze wszystkich stron ograniczoną. Przestrzeń ze wszystkich stron ograniczoną nazywamy ciałem (*der Körper*). Sześcian zatem jest ciałem”¹⁵⁹.
2. „Sześcian rozciąga się w trzech kierunkach: z prawej strony ku lewej, z przodu w tył i z dołu do góry. Rozciągłość z prawej strony ku lewej nazywamy zazwyczaj długością [...], z przodu w tył szerokością [...], a z dołu do góry wysokością”¹⁶⁰.
Dalej dodał:
3. „Sześcian ograniczony jest sześcioma powierzchniami [...]. Powierzchnie ograniczające sześcian są płaskie [...]. Powierzchnia ma tylko dwie rozciągłości”¹⁶¹.
4. „Każdą powierzchnię sześcianu ograniczają cztery krawędzie [...]. Krawędzie sześcianu są liniami prostymi [...]. Linia ma tylko jedną rozciągłość”¹⁶².
5. „Każdą krawędź ograniczają dwa jej punkty końcowe [...]. Punkt [...] nie ma żadnej rozciągłości”¹⁶³.

Te rozważania przypominają refleksje Koppego i Kambly’ego, jak również te umieszczone w wydanych wcześniej podręcznikach samego Moćnika, z tym że w podręczniku do geometrii poglądowej Moćnik nie mówił o dowolnym „ciele” czy „bryle”, ale poszedł krok dalej i rozważał konkretny obiekt – sześcian. Później poddał analizie walec i w oparciu o tę bryłę wprowadził definicję powierzchni krzywej. Walec ograniczony jest przez jedną powierzchnię krzywą i dwie powierzchnie płaskie. Każdą z powierzchni płaskich nazwał „powierzchnią kołową”¹⁶⁴. Poleciał samodzielnie omówić uczniom „prosty trójsięcienny graniastosłup, czworościan i prosty ostrosłup czworościenny”¹⁶⁵, stożek prosty, stożek prosty ścięty i kulę, a sam wprowadził definicje omówionych obiektów w języku granic (rozumianych potocznie): granice ciał nazywamy powierzchniami, granice powierzchni nazywamy liniami, granice linii nazywamy punktami¹⁶⁶. Moćnik zwrócił też uwagę na to, że linia, powierzchnia i ciało powstają na skutek ruchu odpowiednio punktu, linii i powierzchni¹⁶⁷.

Po tych ogólnych rozważaniach autor przeszedł do planimetrii. Najpierw zajął się prostymi i odcinkami, a później kołem, rodzajami kątów i wielokątami. Przyjął następującą definicję trójkąta: „Figurę płaską ograniczoną trzema odcinkami nazywamy

¹⁵⁹ Franz Moćnik, *Geometria poglądowa...*, dz. cyt., cz. 1, s. 1.

¹⁶⁰ Tamże.

¹⁶¹ Tamże.

¹⁶² Tamże, s. 1–2.

¹⁶³ Tamże, s. 2.

¹⁶⁴ Tamże.

¹⁶⁵ Tamże.

¹⁶⁶ Tamże, s. 3.

¹⁶⁷ Tamże.

trójkątem”¹⁶⁸. Na stronie 63 rozpoczął omówienie czworoboków, a na stronie 66 po raz pierwszy wprowadził pojęcie kwadratu. Został on zdefiniowany następująco:

Uwzględniając wielkość kątów i boków, rozróżniamy cztery rodzaje równoległoboków:

- a) romboid [...], tj. równoległobok skośnokątny różnoboczny [...];
- b) romb [...], tj. równoległobok ukośnokątny równoboczny [...];
- c) prostokąt [...], tj. równoległobok prostokątny i równoboczny [powinno być: różnoboczny – przyp. aut.] [...];
- d) kwadrat [...], tj. równoległobok prostokątny i równoboczny¹⁶⁹.

Nie będziemy tutaj opisywać szczegółów związanych z omawianiem poszczególnych figur, ponieważ Moćnik przedstawił w tym zakresie standardowy wykład XIX-wieczny.

Jakkolwiek w tytule podręcznika Moćnik zapowiedział poglądowy wykład geometrii, powyższe fragmenty wyraźnie wskazują, że został on przeprowadzony poglądowo jedynie w wybranych aspektach. Chociaż autor posłużył się bryłami znanymi uczniom z życia codziennego (na przykład sześcianem), w żaden sposób nie zaznaczył tego w tekście – zabrakło tutaj komentarza typu: „kształt sześcianu mają na przykład kostki do gry”. Moćnik poglądowo wprowadził definicje płaszczyzny, linii i punktu, ale figury geometryczne definiował już czysto teoretycznie (w języku planimetrii) – zachowałyby poglądowość, gdyby już na samym początku podręcznika, w trakcie szczegółowego omawiania sześcianu, pokusił się o komentarz typu: „każda ściana sześcianu ograniczona jest czterema równymi krawędziami i posiada cztery kąty proste; ścianę taką nazywamy kwadratem; postaw sześcian na kartce papieru i odrysuj jego ścianę, a otrzymasz kwadrat”.

Komentarze, których zabrakło u Moćnika, można znaleźć w *Geometrii poglądowej* Ignacego Kranza¹⁷⁰. U Kranza przejście od konkretnego (figura stereometryczna) do abstraktu (figura planimetryczna), czyli *de facto* istota poglądowego nauczania geometrii, zostało przeprowadzone zdecydowanie czytelniej i przede wszystkim było uzasadnione merytorycznie. Wydaje się, że to właśnie podręcznik Kranza posłużył Banachowi za źródło do przygotowania wstępu do geometrii umieszczonego w jego podręczniku *Arytmetyka i geometria dla klasy I szkół średnich*¹⁷¹. Wprawdzie materiał został u Banacha rozmieszczony nieco inaczej, niekiedy również był uzupełniony (na przykład u Banacha można znaleźć siatki większej

¹⁶⁸ Tamże, s. 30.

¹⁶⁹ Tamże, s. 66.

¹⁷⁰ Ignacy Kranz, *Geometria poglądowa. Podręcznik na klasę I gimnazjów, gimnazjów realnych i szkół realnych*, Kraków 1917.

¹⁷¹ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla klasy I szkół średnich*, Lwów 1929.

liczby brył), jednakże podobieństwa są wyraźnie dostrzegalne. Aby sprawdzić, że ściany sześcianu są prostopadłe¹⁷², obaj autorzy posługiwali się pionem i libellą, obaj odrysowywali bok sześcianu na kartce papieru i otrzymaną figurę nazywali kwadratem, obaj przeprowadzali wreszcie podobne rozważania o prostopadłościach, stożku i kuli. Wielokrotnie podkreślali, że rozważane bryły są obiektami towarzyszącymi człowiekowi na co dzień. Jedną z kolejnych analogii między podręcznikami stanowi wprowadzenie do obliczania objętości prostopadłościanów – obaj autorzy dokonywali podziału bryły na sześciany jednostkowe¹⁷³.

U Banacha znaleźć można jedną rzecz, która zaburzyła pogładowe wprowadzenie geometrii. Po omówieniu pionu i libelli narysował on kwadrat i prostokąt, a następnie omówił cechy tych figur. Dopiero później przeszedł do sześcianu i pogładowych rozważań, przeprowadzonych już w analogii do rozważań Kranza¹⁷⁴.

Jak wspomniano wyżej, zarządzenia *Programu Gimnazjum Państwowego* zobowiązywały do pogładowego wprowadzenia geometrii do nauczania szkolnego oraz równoczesnego omawiania zagadnień planimetrycznych i stereometrycznych. U Banacha pierwszy wymóg został spełniony (choć z jedną drobną nieścisłością). Realizacja drugiego wymogu była niepełna – wprawdzie w podręcznikach do odpowiednich klas omawiał on zagadnienia zarówno planimetryczne, jak i stereometryczne, ale poświęcał im osobne rozdziały.

Oczywiście, nie we wszystkich podręcznikach szkolnych wydawanych w pierwszej połowie XX w. wprowadzenie do geometrii było tak dokładne, jak u Banacha i Kranza. Bardzo podobne wprowadzenie do geometrii można znaleźć w *Arytmetyce* Tadeusza Sierzputowskiego¹⁷⁵, wykorzystywanej na przykład w II Gimnazjum im. Karola Szajnochy we Lwowie¹⁷⁶. W dwóch innych bardzo popularnych podręcznikach: *Geometrii w zakresie szkoły średniej* Jana Zydlera¹⁷⁷ (wykorzystywanej na przykład w II Gimnazjum im. Karola Szajnochy we Lwowie¹⁷⁸) i *Geometrii. Podręczniku dla szkół średnich* Antoniego Łomnickiego¹⁷⁹ (używanej na przykład w Gimnazjum w Bielsku¹⁸⁰) wprowadzenie do geometrii przypominało to z podręczników Kambly'ego i Koppego.

¹⁷² Tamże, s. 100.

¹⁷³ Tamże, s. 101.

¹⁷⁴ Tamże, s. 97.

¹⁷⁵ Tadeusz Sierzputowski, *Arytmetyka*, Lwów–Warszawa 1931, cz. 1.

¹⁷⁶ *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum II im. K. Szajnochy we Lwowie*, Dyrekcja Państwowego Gimnazjum II, Lwów 1927.

¹⁷⁷ Jan Zydler, *Geometria w zakresie szkoły średniej*, Warszawa 1933.

¹⁷⁸ *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum II im. K. Szajnochy we Lwowie*, dz. cyt.

¹⁷⁹ Antoni Łomnicki, *Geometria. Podręcznik dla szkół średnich*, Lwów–Warszawa 1920, cz. 1: *Planimetria–stereometria*.

¹⁸⁰ *Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum w Bielsku*, Dyrekcja Państwowego Gimnazjum w Bielsku, Bielsko 1930.

4.3. Arytmetyka polityczna

Jednym z podstawowych celów nauczania matematyki, który przyświecał zarówno szkołom elementarnym, jak i szkołom średnim od zarania ich dziejów, było ukazywanie zastosowań matematyki w życiu codziennym. Nauczanie matematyki w najlepszych szkołach związane było z potrzebami lokalnego społeczeństwa. I tak przykładowo koniec XVI i początek XVII w. charakteryzowany był przez rozwój handlu, żeglugi i wzrost znaczenia rzemiosła we wszystkich miastach pomorskich. W związku z tym w programie nauczania w Gimnazjum w Toruniu ówczesny profesor matematyki Adam Freytag (1608–1650)¹⁸¹ zaczął zwracać większą uwagę na użyteczność. Początkowo wykładał on na lekcjach zasady fortyfikacji wojskowych, głównie francuskich i włoskich, a z biegiem lat rozszerzył materiał o zastosowania matematyki w geografii¹⁸². Omówiwszy geometrię płaską, przechodził do geometrii sferycznej, co następnie umożliwiało mu zajmowanie się teorią planet i pewnymi działami chronologii (na lekcjach uczniowie zapoznawali się z ruchami gwiazd i obliczali czas wschodu i zachodu słońca czy długość poszczególnych dni i nocy)¹⁸³. W programach nauczania szkoły toruńskiej można było również znaleźć początki arytmetyki politycznej, określanej także terminami „arytmetyka handlowa” lub „arytmetyka finansowa”. W XVI w. związana była ona głównie z regułą trzech i jej zastosowaniami. Faktyczny rozwój tej gałęzi matematyki datuje się na wiek XVII.

Pojęcia „arytmetyka polityczna” po raz pierwszy użył William Petty w *Natural and Political Observations...* z 1676 r., wiążąc je przede wszystkim ze statystycznym opracowaniem śmiertelności. Z biegiem lat do przedmiotu badań arytmetyki politycznej dołączono inne zagadnienia bliskie życiu państwowemu i społecznemu, które można było zmatematyzować (na przykład dochody pań-

¹⁸¹ Adam Freytag w 1631 r. opublikował dzieło pod tytułem *Architectura militaris (Architectura militaris nova et aucta oder Neue vermehrte Fortification, von regular Vestungen, von irregular Vestungen und aussen wercken*, Lejda 1631), opisujące budowę oraz metody zdobywania i obrony fortyfikacji bastionowych typu staroholenderskiego. W 1965 r. historyk wojskowości Tadeusz Nowak sformułował opinię, że „było ono w chwili ukazania się i jest do dziś uważane za najlepszą na świecie pracę w tej dziedzinie” (*Przegląd polskiego piśmiennictwa dziedziny fortyfikacji i inżynierii wojskowej w XVI–XVIII w.*, „Studia i Materiały do Historii Wojskowości” 1965, t. 11, nr 2, s. 128). Dzieło to przyniosło Freytagowi wielką sławę i sprawiło, że książkę Janusz Radziwiłł uczynił go inżynierem wojskowym w wojnie z Rosją. Freytag miał wówczas dwadzieścia pięć lat i był to początek jego wieloletniej służby dla Radziwiłłów. W 1632 r. otrzymał on tytuł doktora medycyny na Uniwersytecie w Lejdzie (*Wybitni ludzie dawnego Torunia*, red. Marian Biskup, Warszawa–Poznań–Toruń 1982, s. 76). W Gimnazjum w Toruniu pracował od połowy lat 30. do początku lat 40. XVI w.

¹⁸² Kazimierz Kubik, *Nauczanie matematyki w toruńskim Gimnazjum Akademickim w XVI–XVIII w.*, [w:] *Księga pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego*, [w:] t. 1: XVI–XVIII w., red. Zbigniew Zdrójkowski, Toruń 1972, s. 115.

¹⁸³ Tamże, s. 115–116.

stwa czy podatki)¹⁸⁴. Najbardziej obszerne podręczniki z tego zakresu, wydawane w XIX w., zawierały już: rachunek procentów prostych i składanych, prawdopodobieństwo, pożyczki, loterie, śmiertelność, obliczanie rent, obliczenia związane z ubezpieczeniami na życie¹⁸⁵, wekslami, instytucjami kredytowymi i kasami oszczędności¹⁸⁶. W stuleciu tym opublikowano też pierwsze polskie dzieła traktujące o arytmetyce politycznej, jak na przykład *Rachunkowość handlową w ważniejszych jej zastosowaniach* Floriana Alexandra Zubelowicza¹⁸⁷, w której na 384 stronach omówiono rachunki związane z procentem prostym i składanym, weksle, arbitraże i rachunki dotyczące ubezpieczeń na życie (ostatnie zagadnienie opracowane zostało przez Józefa Słomińskiego).

Dopiero od przełomu XIX i XX w. można mówić o wzmożonym zainteresowaniu arytmetyką polityczną wśród polskich autorów. Powstały wówczas między innymi *Tablice służące do przeprowadzania rachunków amortyzacyjnych w tych wypadkach, gdy kapitał jest oprocentowanym z góry* Aleksandra Czajewicza¹⁸⁸, *Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych* Adama Bolesława Danielewicza¹⁸⁹ i *Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy, w zastosowaniu do urzędzenia kas emerytalnych* Teofila Rozmarynowicza¹⁹⁰. Pierwszą polską książką zawierającą kompleksowy wykład arytmetyki politycznej był *Zarys arytmetyki politycznej* Adama Bolesława Danielewicza i Samuela Dicksteina¹⁹¹, w którym omówiono rachunek procentów prostych i składanych, rachunek prawdopodobieństwa (między innymi twierdzenia Bernoulliego i Poissona oraz Prawo Wielkich Liczb), gry losowe, statystykę (którą powiązano głównie z zagadnieniem śmiertelności) i ubezpieczenia (między innymi ubezpieczenia rent, kapitałów na dożycie, kapitałów pośmiertnych, niezdolności do pracy, a także „wykup, redukcję i zmianę ubezpieczeń”¹⁹²). Wszystkie rozważania

¹⁸⁴ Józef Maria Hoene-Wroński uważał arytmetykę polityczną za naukę mającą za przedmiot prawidła, według których można oceniać siły państwa (Adam Bolesław Danielewicz, Samuel Dickstein, *Zarys arytmetyki politycznej*, Warszawa 1910, s. I).

¹⁸⁵ Ludwig Oettinger, *Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen*, Braunschweig 1845.

¹⁸⁶ Leopold Carl Bleibtreu, *Politische Arithmetik. Anleitung zur Kenntnis und Übung aller im Staatswesen vorkommenden Berechnungen*, Heidelberg 1853.

¹⁸⁷ Florian Alexander Zubelowicz, *Rachunkowość handlowa w ważniejszych jej zastosowaniach*, Warszawa 1846.

¹⁸⁸ Aleksander Czajewicz, *Tablice służące do przeprowadzania rachunków amortyzacyjnych w tych wypadkach, gdy kapitał jest oprocentowanym z góry*, Warszawa 1902.

¹⁸⁹ Adam Bolesław Danielewicz, *Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych*, Warszawa 1896.

¹⁹⁰ Teofil Rozmarynowicz, *Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy, w zastosowaniu do urzędzenia kas emerytalnych*, Warszawa 1886.

¹⁹¹ Adam Bolesław Danielewicz, Samuel Dickstein, *Zarys arytmetyki politycznej*, Warszawa 1910.

¹⁹² Tamże, s. 294–394.

zamieszczone w książce autorzy przeprowadzili opierając się wyłącznie na matematyce elementarnej – jak sami zaznaczyli, bazowali na „arytmetyce i algebrze szkolnej”¹⁹³.

W XVII i XVIII w. wykład arytmetyki politycznej w szkołach średnich na ziemiach polskich obejmował zazwyczaj jedynie regułę trzech i jej zastosowania. Sytuacja zaczęła się zmieniać dopiero na skutek rewolucji przemysłowej. Rozwój takich gałęzi przemysłu, jak między innymi przemysł stoczniowy, węglowy, metalowy i metalurgiczny, czy wzrost handlu i powstawanie nowych szlaków komunikacyjnych spowodowały, że w XIX w. diametralnie wzrosła liczba banków, instytucji kredytowych i giełd; zaczął też wyłaniać się sektor ubezpieczeń. Szkoły otrzymały zadanie: „dać swym wychowankom podstawy do zrozumienia metod rachunkowych, stosowanych w ważnych zagadnieniach życia społecznego i państwowego”¹⁹⁴. Tym samym coraz więcej zagadnień będących przedmiotem badań arytmetyki politycznej zaczęto wplatać do podręczników szkolnych.

W pierwszych latach XIX w. poziom nauczania arytmetyki politycznej w szkołach średnich wciąż był bardzo zróżnicowany. Funkcjonowały szkoły, w których nauczano jedynie reguły trzech i jej zastosowań. Przykładem było tutaj Gimnazjum Wołyńskie w Krzemieńcu¹⁹⁵, gdzie naukę opierano na *Krótkim wykładzie arytmetyki* Józefa Czecha¹⁹⁶. Jedną ze szkół z najszerszym zakresem nauczania arytmetyki politycznej było wówczas Gimnazjum w Poznaniu. W 1804 r. nauczano tam reguły łańcuchowej, reguły spółki, obliczano prowizje i przeprowadzano rachunki związane z obrotem weksłami¹⁹⁷. W 1812 r. wprowadzono pierwsze zarządzenia dla szkół średnich funkcjonujących na ziemiach polskich, które ustanowiły arytmetykę polityczną obowiązkowym elementem programów nauczania. Zarządzenia te przygotowano dla szkół departamentowych Księstwa Warszawskiego. Oprócz reguł trzech prostej i składanej, spółki i łańcuchowej omawiano w tych szkołach regułę procentu i „wzory rejestrów kupieckich, gospodarskich, wojskowych”¹⁹⁸. Na podstawie zarządzeń z 1835 r. w klasie czwartej oddziału technicznego gimnazjów funkcjonujących w Królestwie Polskim¹⁹⁹ wprowadzono oddzielny przedmiot o nazwie „Rachunkowość kupiecka”. Wykładano go w wymiarze dwóch godzin tygodniowo²⁰⁰, co stanowiło jedną czwartą wszystkich godzin poświęconych na lekcje matematyki w tej klasie w tygodniu. Zagadnienia wykładane w ramach tego przedmiotu podzielono na „arytmetykę

¹⁹³ Tamże, s. IV.

¹⁹⁴ Tamże.

¹⁹⁵ *Materie z nauk w Gymnazium Wołyńskim przez przeciąg roku szkolnego wyłożonych*, 1809.

¹⁹⁶ Józef Czech, *Krótki wykład arytmetyki*, Wilno 1807. Zob. *Dokumenty Liceum Wołyńskiego w Krzemieńcu*, Biblioteka Narodowa, sygn. IV 7785 t. 1.

¹⁹⁷ *Doniesienie o nowouorganizowanem Królewskim Gimnazjum w Poznaniu*, Poznań 1804.

¹⁹⁸ *Plan nauk szkół departamentowych 1812 roku*, 1812, s. 51.

¹⁹⁹ Gimnazja były wówczas szkołami ośmioklasowymi.

²⁰⁰ Archiwum Państwowe w Łodzi, zespół: Szkoła Powiatowa w Rawie, sygn. 12.

handlową” i „buchalterię”. Arytmetyka handlowa obejmowała między innymi omówienie weksli, procentów pojedynczych i składanych oraz arbitraży w oparciu o podręcznik *O rachunkowości kupieckiej* Antoniego Barcińskiego (t. 1)²⁰¹. Na buchalterii uczono „metody pojedynczego i podwójnego utrzymania ksiąg handlowych, przemysłowych i gospodarstw wiejskich”²⁰².

W drugiej połowie XIX w. zagadnienia z arytmetyki politycznej czy arytmetyki handlowej stały się już stałym elementem programów nauczania wszystkich szkół średnich, które umieszczano w większości podręczników szkolnych. Ich omawianie stało się na tyle oczywiste, że pominięto je na przykład w *Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und der höheren Bürgerschulen* z 1859 r.²⁰³, przeznaczonym dla szkół realnych funkcjonujących na ziemiach polskich pod zaborem pruskim, choć wiadomo, że zagadnienia te były w tych szkołach omawiane, a nawet pojawiały się na egzaminach maturalnych. W roku szkolnym 1862/1863 na egzaminie maturalnym w Szkole Realnej w Toruniu uczniowie musieli przykładowo rozwiązać następujące zadanie:

Zadanie. Ktoś pożycza kapitał w wysokości 1 000 talarów. Po roku otrzymuje zwrot tego kapitału wraz z odsetkami. Zmniejsza otrzymaną kwotę o 240 talarów i pożycza ją na kolejny rok przy stopie procentowej o jeden punkt większej. Odsetki uzyskane w ten sposób są równe odsetkom, które zostały uzyskane na koniec pierwszego roku. Na ile procent kapitał został pożyczony za pierwszym razem?²⁰⁴

Szkoły typu realnego były szkołami średnimi o profilu matematyczno-przyrodniczym, a gimnazja – szkołami średnimi o profilu humanistycznym. Okazuje się jednak, że pod względem nauczania arytmetyki politycznej w obydwu typach szkół nie odnotowano istotnych różnic. Podobna sytuacja miała miejsce w zaborach austriackim i rosyjskim.

Analizując treści umieszczone w podręcznikach Ludwiga Kambly’ego²⁰⁵, powszechnie wykorzystywanym w gimnazjach funkcjonujących w zaborze pruskim, i Karla Koppego²⁰⁶ używanym w szkołach realnych tego zaboru, można zauważyć, że w obu omówiono kapitał na procencie składanym z roczną kapitalizacją odsetek²⁰⁷

²⁰¹ Antoni Barciński, *O rachunkowości kupieckiej*, t. 1: *Arytmetyka handlowa*, Warszawa 1833.

²⁰² Archiwum Państwowe w Łodzi, zespół: Szkoła Powiatowa w Rawie, sygn. 12.

²⁰³ *Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und der höheren Bürgerschulen*, Berlin 1859.

²⁰⁴ *Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn 1863.

²⁰⁵ Ludwиг Kambly, *Die Elementar Mathematik*, cz. 1: *Arithmetik und Algebra*, Ferdinand Hirt, Breslau 1876.

²⁰⁶ Karl Koppe, *Die Arithmetik und Algebra für den Schul- und Selbst-Unterricht*, Essen 1872.

²⁰⁷ Ludwиг Kambly, *Die Elementar Mathematik*, dz. cyt., cz. 1, s. 88; Karl Koppe, *Die Arithmetik und Algebra*..., dz. cyt., s. 191–192.

i rachunek rent²⁰⁸. U Kambly'ego zagadnienie dotyczące kapitału umieszczonego na procencie składanym zostało dodatkowo rozszerzone o dołączanie do niego wkładów²⁰⁹:

Charakterystyka problemu: Jeżeli ktoś do kapitału K umieszczonego na procencie składanym $P\%$, dołącza jeszcze przez n lat z końcem każdego roku kapitał r , to po upływie n lat osiągnie kwotę W_n . Znaleźć związek między wielkościami: K, P, n, r i W_n .

$$\text{Rozwiązanie: } W_n = Kq^n + r \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Zagadnienie to nie pojawiało się u Koppego. Oznacza to, że zakres materiału z arytmetyki politycznej w podręczniku dla gimnazjów był szerszy niż w podręczniku dla szkół realnych zaboru pruskiego.

W gimnazjach i szkołach realnych zaboru rosyjskiego omawiano nieco węższy zakres materiału z arytmetyki politycznej niż w szkołach pruskich. Naukę kończono tam na rozważaniu procentów składanych z roczną kapitalizacją odsetek, w zadaniach zajmowano się między innymi umarzaniem długu²¹⁰, nie poruszano natomiast kwestii rachunku rent i wkładów dołączanych do kapitału. W szkołach średnich zaboru austriackiego przez większość drugiej połowy XIX w. omawiano podobne zagadnienia z arytmetyki politycznej, jak w szkołach zaboru pruskiego. W popularnym podręczniku *Arytmetyka i algebra dla klas wyższych gimnazjalnych i realnych* Franza Moćnika²¹¹ dla gimnazjów i szkół realnych zaboru austriackiego²¹² znaleźć można zagadnienia analogicz-

Charakterystyka problemu: Kapitał K zostaje na procencie składanym $P\%$ i rocznej kapitalizacji przez n lat i wzrasta do wysokości K_n . Znaleźć związek między wielkościami K, P, n i K_n .

$$\text{Rozwiązanie: } K_n = Kq^n, \text{ gdzie } q = 1 + \frac{P}{100}.$$

²⁰⁸ Karl Koppe, *Die Arithmetik und Algebra...*, dz. cyt., s. 200; Ludwig Kambly, *Die Elementar Mathematik*, dz. cyt., cz. 1, s. 93. Rentą nazywano kwotę pieniężną wypłacaną każdego roku osobie, która włożyła w tym celu pewien kapitał w towarzystwie ubezpieczeniowym. Renty dzielono na czasowe i dożywotnie.

Charakterystyka problemu: Ktoś wnosi do kasy ubezpieczenia przez m lat na początku każdego roku kwotę K na procent składany $P\%$, aby po upływie tego czasu pobierać przez n lat następnych na końcu każdego roku rentę wysokości r . Znaleźć związek między wielkościami: m, K, P, n oraz r .

$$\text{Rozwiązanie: } n = \frac{\log r - \log[r - Kq(q^m - 1)]}{\log q}.$$

²⁰⁹ Ludwig Kambly, *Die Elementar Mathematik*, dz. cyt., cz. 1, s. 90.

²¹⁰ *Программы преподавания...*, dz. cyt., s. 47.

²¹¹ Franz Moćnik, *Arytmetyka i algebra dla klas wyższych gimnazjalnych i realnych*, przeł. Tomasz Stanecki, Karol Wild, Lwów 1872.

²¹² Przykładem szkoły realnej, w której korzystano z tego podręcznika, jest Wyższa Szkoła

ne do tych, które opisano u Kambly'ego. Zdecydowanie szerszy zakres zastosowań matematyki w bankowości czy ubezpieczeniach przedstawił dopiero Placyd Dziwiński w *Zasadach algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych*²¹³. Z tego właśnie podręcznika Stefan Banach uczył się arytmetyki politycznej w najwyższych klasach IV Gimnazjum w Krakowie; wykorzystywał wtedy również zbiór zadań Ignacego Kranza²¹⁴. W klasach niższych arytmetyki politycznej uczył się z podręczników Mariana Baranieckiego²¹⁵ i Kaspra Brzostowicza²¹⁶.

Dokonyamy teraz szczegółowej analizy porównawczej zagadnień z arytmetyki politycznej, omówionych w podręcznikach, z których Stefan Banach uczył się w IV Gimnazjum w Krakowie, i tych, które przygotował jako autor lub współautor. Zarządzenia dotyczące nauczania matematyki w szkołach powszechnych i średnich, wydawane po odzyskaniu przez Polskę niepodległości, uwzględniały jedynie podstawy arytmetyki politycznej, takie jak reguła trzech i procenty oraz ich zastosowanie w sytuacjach z życia codziennego²¹⁷. Jak dowodzi *Program Gimnazjum Państwowego. Wydział Matematyczno-Przyrodniczy z 1931 r.*²¹⁸, w niektórych zarządzeniach w ogóle nie wprowadzono takich zagadnień. Tym samym wedle wymogów ministerialnych w podręcznikach przygotowanych przez Stefana Banacha, Wacława Sierpińskiego i Włodzimierza Stożka musiały znaleźć się jedynie reguła trzech i procenty.

Zazwyczaj pierwsze zagadnienia z arytmetyki politycznej autorzy podręczników szkolnych wprowadzali przy omawianiu zastosowań proporcji. W zależności od tego, jak dużą wagę przykładali do zastosowań i tego, do której klasy podręczniki były przygotowywane, można znaleźć w nich omówione co najwyżej: regułę trzech prostą, regułę trzech składaną, regułę spółki i regułę łańcuchową. Reguły te wykorzystywano później do rozwiązywania zadań związanych z procentem prostym i składanym.

I tak pierwszym podręcznikiem używanym przez Banacha w IV Gimnazjum w Krakowie, w którym omówiona została reguła trzech prosta dla wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalnych, był podręcznik Baranieckiego. Zadania

Realna w Stanisławowie (*Sprawozdanie Dyrekcji c.k. wyższej szkoły realnej w Stanisławowie*, Stanisławów 1887, s. 24).

²¹³ Placyd Dziwiński, dz. cyt.

²¹⁴ Ignacy Kranz, *Zbiór zadań matematycznych...*, dz. cyt.

²¹⁵ Marian Baraniecki, *Podręcznik arytmetyki...*, dz. cyt., cz. 1; tenże, *Podręcznik arytmetyki...*, dz. cyt., cz. 2.

²¹⁶ Kasper Brzostowicz, *Początki arytmetyki i algebry...*, dz. cyt.

²¹⁷ *Program nauki w szkołach powszechnych siedmioklasowych. Rachunki z geometrią*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1920; *Program Gimnazjum Państwowego. Gimnazjum Niższe. Matematyka*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1920.

²¹⁸ *Program Gimnazjum Państwowego. Wydział Matematyczno-Przyrodniczy*, Lwów 1931.

dotyczące reguły trzech prostej Baraniecki rozwiązywał na dwa sposoby: przy użyciu proporcji i za pomocą „sprowadzania do jednostki”. U Dziwińskiego jedyną metodą rozwiązania zadań tego typu była metoda proporcji, a Brzostowicz i Kranz w ogóle nie poruszali tego zagadnienia. Banach w swoich podręcznikach podał dwie metody: metodę proporcji i metodę „sprowadzania do jedności”²¹⁹, która *de facto* była tą samą metodą, co metoda „sprowadzania do jednostki”, wprowadzona przez Baranieckiego. Metodę „sprowadzania do jedności” uczynił już jedyną metodą rozwiązywania zadań „na” regułą trzech składaną.

Reguła trzech składana była dla Banacha metodą wymagającą dwukrotnego wykorzystania reguły trzech prostej. Oznacza to, że stosował on definicję węższą niż ta, którą sam poznawał w IV Gimnazjum w Krakowie. Brzostowicz i Dziwiński rozumieli ją bardziej ogólnie, mianowicie:

Jeżeli w zagadnieniu danych jest więcej niż trzy liczb (ale zawsze ilość nieparzysta liczb n.p. 5, 7, 9, ...), a z tych jedna tego samego gatunku²²⁰, co liczba niewiadoma, z pozostałych zaś liczb danych co dwie są jednakowego gatunku, a różne te gatunki są z gatunkiem, do którego należy liczba niewiadoma, albo wprost albo odwrotnie proporcjonalne, natenczas sposób wyznaczenia niewiadomej za pomocą proporcji złożonej, nazywa się regułą trzech składaną²²¹.

Zadania „na” regułą trzech składaną Banach rozwiązywał poprzez dwukrotne wykorzystanie metody „sprowadzenia do jedności”²²². Oczywiście, nie oznaczało to, że nie rozważał zadań z większą liczbą danych – gdy w zadaniu liczba danych była większa niż pięć, to zawsze dokonywał redukcji danych do pięciu. Dziwiński zadania tego typu rozwiązywał tylko przy użyciu metody proporcji, Brzostowicz z kolei (reguła trzech składana była już w jego podręczniku omówiona) wykorzystywał dwie metody: proporcji i „wnioskowania”; ta druga była niczym innym, jak tylko kilkukrotnym wykonaniem metody „sprowadzania do jednostki/jedności”.

Przewagę metody używanej przez Banacha nad metodą proporcji stosowaną przez Brzostowicza i Dziwińskiego stanowiło uniknięcie problemu związanego z oceną, które wielkości podane w treści zadania były wprost, a które odwrotnie

²¹⁹ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1933, s. 71; ciż, *Arytmetyka i geometria dla klasy III szkół średnich*, Lwów–Warszawa 1931, s. 10; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, Lwów–Warszawa 1935, s. 75–76.

²²⁰ Chodzi tu o jednorodne liczby mianowane, na przykład 2 m i 8 m albo 4 jabłka i 8 jablek.

²²¹ Placyd Dziwiński, dz. cyt., s. 105.

²²² Metoda „sprowadzania do jedności” wprowadzona przez Baranieckiego była tym samym, co metoda „sprowadzania do jedności” Banacha, dlatego w dalszej części artykułu obie nazywać będziemy metodą „sprowadzania do jednostki/jedności”.

proporcjonalne. W ten sposób Banach ograniczył możliwość popełnienia błędu przez ucznia.

Aby dostrzec różnicę pomiędzy metodą „sprowadzania do jednostki/jedności” i metodą proporcji rozwiążemy jedno z zadań, które Banach przeznaczył do samodzielnego rozwiązywania przez uczniów, tymi dwiema metodami:

Zadanie. „15 robotników, pracujących po 9 godzin dziennie wykopałoby w 4 dniach rów 100 m długi; w ilu dniach wykopie 9 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, rów długości 120 m?”²²³

Rozwiązanie 1 (metodą sprowadzania do jednostki/jedności)

Wiemy, że:

- 15 robotników, pracując 9 godzin dziennie, w ciągu 4 dni wykopie rów o długości 100 metrów;
- 9 robotników, pracując 8 godzin dziennie, w ciągu dni wykopie rów o długości 120 metrów.

W treści zadania zostało umieszczonych siedem danych, należy więc usunąć pewne dwie wielkości jednakowego gatunku. W przypadku tego zadania można usunąć jedynie liczbę robotników. Należy to zrobić w sposób następujący: 15 robotników pracuje 9 godzin dziennie, co daje łącznie godzin pracy dziennie; jeżeli 9 robotników pracuje 8 godzin dziennie, to daje to łącznie 72 godziny pracy dziennie. Wobec tego dane podane w treści zadania możemy równoważnie zapisać w sposób następujący:

- 135 godzin pracy dziennie w ciągu 4 dni daje rów o długości 100 metrów;
- 72 godziny pracy dziennie w ciągu dni daje rów o długości 120 metrów.

1) Przyjmujemy stałą długość rowu (100 m) i rozumujemy:

- Jeżeli przy 135 godzinach pracy dziennie rów zostanie wykopany w ciągu 4 dni;
- to przy 1 godziny pracy dziennie rów zostanie wykopany w ciągu $4 \cdot 135$ dni;
- a przy 72 godzinach pracy dziennie rów zostanie wykopany w ciągu $\frac{4 \cdot 135}{72}$ dni.

2) Przyjmujemy stałą liczbę godzin (72 godziny) i rozumujemy:

- Jeżeli rów o długości 100 metrów zostanie wykopany w ciągu $\frac{4 \cdot 135}{72}$ dni;
- to rów o długości 1 metra zostanie wykopany w ciągu $\frac{4 \cdot 135}{72 \cdot 100}$ dni;

²²³ Stefan Banach, Waław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, dz. cyt., s. 86; ciż, *Arytmetyka i geometria dla klasy III szkół średnich*, dz. cyt., s. 24; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 89.

- a rów o długości 120 metrów zostanie wykopany w ciągu $\frac{4 \cdot 135 \cdot 120}{72 \cdot 100}$ dni, czyli 9 dni.

9 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, wykopie zatem rów o długości 120 metrów w 9 dni.

Rozwiązanie 2 (metodą proporcji)

Wiemy, że:

- 15 robotników, pracując 9 godzin dziennie, w ciągu 4 dni wykopie rów o długości 100 metrów;
- 9 robotników, pracując 8 godzin dziennie, w ciągu dni wykopie rów o długości 120 metrów.

Układamy proporcje:

- 1) liczba dni pracy jest odwrotnie proporcjonalna do liczby robotników, otrzymujemy zatem: $4 : x = 9 : 15$;
- 2) liczba dni pracy jest odwrotnie proporcjonalna do dziennej liczby godzin pracy, stąd mamy: $4 : x = 8 : 9$;
- 3) liczba dni pracy jest wprost proporcjonalna do długości rowu, co daje: $4 : x = 100 : 120$.

Zatem:

$$\begin{array}{l} 4 : x = 9 : 15 \\ 8 : 9 \\ 100 : 120 \end{array}$$

Stąd $4 : x = 9 \cdot 8 \cdot 100 : 15 \cdot 9 \cdot 120$, czyli $4 : x = 7200 : 16200$, co daje $x = 9$.

Będąc uczniem IV Gimnazjum w Krakowie Banach poznawał również regułę łańcuchową i regułę spółki. Bazował wówczas na podręczniku Dziwińskiego²²⁴. Tych zagadnień w swoich podręcznikach już nie umieścił.

Reguła trzech prosta i składana, reguła łańcuchowa i reguła spółki stanowiły podbudowę merytoryczną dla podstawowych zagadnień arytmetyki politycznej.

Jakiej arytmetyki politycznej uczył się Banach w IV Gimnazjum w Krakowie? Najpierw poznawał regułę procentu prostą i składaną. Były one szczególnymi przypadkami reguły trzech prostej i składanej, w sytuacji gdy jedna z danych wielkości przyjmowała wartość stu jednostek. Zagadnienia te zostały omówione w podręczniku Baranieckiego²²⁵. Jedno z rozwiązywanych przez autora zadań było następujące:

²²⁴ Baraniecki, Brzostowicz i Kranz nie omawiali tych zagadnień.

²²⁵ Marian Baraniecki, *Podręcznik arytmetyki...*, dz. cyt., cz. 2, s. 37–48.

B) »Na jaką stopę umieszczono 4560 K, które w ciągu 5-u lat przyniosły 1596 K?«

$$\begin{array}{rcl}
 4560 \text{ K} & \text{-----} & 5 \text{ l.} & \text{-----} & 1596 \text{ K} \\
 100 \text{ „} & \text{-----} & 1 \text{ r.} & \text{-----} & x \text{ „} \\
 \hline
 4560 \text{ K} & \text{-----} & 5 \text{ l.} & \text{-----} & 1596 \text{ K} \\
 1 \text{ „} & \text{-----} & 5 \text{ „} & \text{-----} & \frac{1596}{4560} \text{ K} \\
 1 \text{ „} & \text{-----} & 1 \text{ r.} & \text{-----} & \frac{1596}{4560 \times 5} \text{ K} \\
 100 \text{ „} & \text{-----} & 1 \text{ „} & \text{-----} & \frac{1596 \times 100}{4560 \times 5} \text{ K} = 7 \text{ K.}
 \end{array}$$

Odp. Na 7%.

Fot. 2. Zadanie z arytmetyki politycznej umieszczone w podręczniku Baranieckiego²²⁶

Baraniecki omawiał też rachunki związane z weksłami, szczególną uwagę zwracając na dyskonta (nazywano tak odsetki od sumy wystawionej na weksłu, uzyskane w czasie od chwili nabycia weksła do jego terminu). Procenty składane zostały wprowadzone w podręczniku Brzostowicza w kontekście rocznej kapitalizacji odsetek. Dziwiński przedyskutował też kapitalizację półroczną i miesięczną. Osobno zajął się kapitalizacją wkładek oraz kapitałem i wkładkami na procencie składanym. Później przeszedł do amortyzacji, czyli umarzania długu ratami. Rozważył dwa przypadki. W pierwszym dług miał być spłacany na skutek uiszczania rocznych rat w ustalonej wysokości, płatnych poczynając od końca roku, w którym dług został zaciągnięty. W drugim przypadku spłata miała się rozpocząć dopiero po m latach:

442. Uwaga. Jeżeli dług K zł. ma być umorzony za pomocą n rat w wysokości r zł., płatnych z końcem każdego roku, a spłata ma się rozpocząć dopiero po m latach, wówczas otrzymujemy równanie:

$$Kq^{m+n} = r \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad (143)$$

z którego możemy oznaczyć jedną z 5 wielkości K , r , m , n , q , gdy cztery inne są znane.

Fot. 3. Zagadnienie dotyczące umarzania długu umieszczone w podręczniku Dziwińskiego²²⁷

Ostatnimi zagadnieniami w podręczniku Dziwińskiego były rachunek rent i rachunek ubezpieczeń na życie. Rachunek rent omówił tak samo, jak Kambly, Koppe i Mochnik. Przeprowadzenie rachunków związanych z ubezpieczeniami wyróżniało natomiast podręcznik Dziwińskiego spośród wszystkich innych pod-

²²⁶ Tamże, s. 45.

²²⁷ Placyd Dziwiński, dz. cyt., s. 309.

ręczników szkolnych wydanych w XIX w.

Rachunek ubezpieczeń na życie został u Dziwińskiego poprzedzony wyjaśnieniem, w jaki sposób należy obliczać prawdopodobną długość życia. Do tego były mu potrzebne tablice śmiertelności – podawały one ilość osób, które z tysiąca nowonarodzonych pozostawały z roku na rok przy życiu.

Fot. 4. Tablica śmiertelności²²⁸

W wieku	Żyje osób	W wieku	Żyje osób	W wieku	Żyje osób	W wieku	Żyje osób
0	1000	25	466	50	300	75	69
1	750	26	461	51	291	76	62
2	661	27	456	52	282	77	55
3	618	28	451	53	273	78	49
4	593	29	445	54	264	79	43
5	579	30	439	55	255	80	37
6	567	31	433	56	246	81	32
7	556	32	427	57	237	82	28
8	547	33	421	58	228	83	24
9	539	34	415	59	219	84	20
10	532	35	409	60	210	85	17
11	527	36	402	61	201	86	14
12	523	37	395	62	192	87	12
13	519	38	388	63	182	88	10
14	515	39	381	64	172	89	8
15	511	40	374	65	162	90	6
16	507	41	367	66	152	91	5
17	503	42	360	67	142	92	4
18	499	43	353	68	132	93	3
19	495	44	346	69	122	94	2
20	491	45	339	70	112	95	1
21	486	46	332	71	103	96	0
22	481	47	324	72	94		
23	476	48	316	73	85		
24	471	49	308	74	77		

Aby obliczyć prawdopodobną długość życia dla osoby mającej obecnie n lat, Dziwiński polecił najpierw znaleźć w tablicy śmiertelności liczbę osób mających n lat, podzielić tę liczbę przez dwa i wyszukać rok, któremu odpowiadał wynik. Rok ten wskazywał wówczas prawdopodobną długość życia²²⁹.

Umiejętność ta była mu potrzebna do omówienia następujących zagadnień związanych z ubezpieczeniami²³⁰:

1) Zabezpieczenie kapitału na dożywocie

Charakterystyka problemu: Osoba mająca n lat chce sobie zabezpieczyć kapitał A zł, płatny po r latach pod warunkiem, że w tym czasie będzie jeszcze przy życiu. Obliczyć wysokość premii W , jeśli zakład liczy procent składany $P\%$.

²²⁸ Tamże, s. 343.

²²⁹ Tamże, s. 343–344.

²³⁰ Tamże, s. 353–358.

- 2) Zabezpieczenie natychmiastowej renty dożywotniej
Charakterystyka problemu: Ktoś mając n lat chce sobie zabezpieczyć natychmiastową rentę roczną A zł, płatną z końcem każdego roku aż do śmierci. Obliczyć wysokość premii W .
- 3) Zabezpieczenie renty od pewnego terminu
Charakterystyka problemu: Ktoś mając n lat zabezpiecza sobie rentę dożywotnią A zł, płatną po k latach aż do jego śmierci. Obliczyć wysokość premii W .
- 4) Zabezpieczenie kapitału pośmiertnego na życie jednej osoby
Charakterystyka problemu: Osoba mająca n lat chce w Towarzystwie wzajemnych ubezpieczeń zabezpieczyć spadkobiercom kapitał K zł, płatny na wypadek swej śmierci. Obliczyć wysokość premii W ²³¹.

Po wypisaniu zadań ćwiczeniowych dla uczniów Dziwiński kończy rozważania związane z arytmetyką polityczną.

Podręcznik Dziwińskiego doczekał się kilku wydań. Używano go w polskich szkołach średnich przez niespełna trzy dekady. W 2016 r. Łukasz Turski opublikował w *Wiadomościach Matematycznych* artykuł²³², w którym bardzo wysoko ocenił arytmetykę polityczną omówioną w podręczniku Dziwińskiego. Podręcznik ten uznał za jeden z najlepszych polskich podręczników szkolnych.

Warto tutaj zaznaczyć, że podręcznik Dziwińskiego był innowacyjny tylko pod względem umieszczenia w nim zagadnień związanych z ubezpieczeniami. Wszystkie pozostałe zagadnienia z arytmetyki politycznej omówione u Dziwińskiego poruszano też w wielu innych podręcznikach z XIX w. Co więcej, zauważalne jest, że

$$^{231} \text{ Rozwiązania: Ad. 1) } W = \frac{a_{n+r}}{a_n} \cdot \frac{A}{q^r}, \text{ Ad. 2) } W = A \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1+r_{n+1}}{q},$$

$$\text{Ad. 3) } W = A \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_n q^{k-1}} \cdot r_{n+k-1}, \text{ Ad. 4) } W = K \cdot \frac{1-(q-1)r_n}{q},$$

gdzie a_i jest wartością z tablicy śmiertelności; $q = 1 + \frac{P}{100}$; r_i jest wartością z tab. na fot. 5.

Wiek (n)	Premia jednostk. (r_n)	Wiek (n)	Premia jednostk. (r_n)	Wiek (n)	Premia jednostk. (r_n)
20	18:45	37	15:74	54	11:28
21	18:33	38	15:53	55	10:98
22	18:20	39	15:32	56	10:67
23	18:17	40	10:09	57	10:34
24	17:94	41	14:86	58	10:05
25	17:80	42	14:62	59	9:73
26	17:66	43	14:37	60	9:41
27	17:51	44	14:12	61	9:10
28	17:36	45	13:86	62	8:78
29	17:20	46	13:59	63	8:46
30	17:04	47	13:32	64	8:15
31	16:87	48	13:04	65	7:83
32	16:70	49	12:76	66	7:52
33	16:52	50	12:47	67	7:21
34	16:33	51	12:18	68	6:91
35	16:14	52	11:88	69	6:61
36	15:95	53	11:58	70	6:32

Fot. 5. Premie jednostkowe dla osób mających n lat (r_n) (tamże, s. 356).

²³² Łukasz Andrzej Turski, *Kłeska nauczania matematyki i przedmiotów ścisłych w Polsce w XX wieku. Co można z tym zrobić?*, „Wiadomości Matematyczne” 2016, t. 52, nr 1, s. 69–76.

Dziwiński w dość dużym stopniu wzorował się na podręczniku *Arytmetyka i algebra dla klas wyższych gimnazjalnych i realnych* Franza Močnika²³³. Bardzo podobnie omawiał teorię dotyczącą arytmetyki politycznej. Można też znaleźć u Dziwińskiego bardzo podobne, a czasem wręcz nawet identyczne zadania.

Dziwiński czasem wykorzystywał te same liczby, a nieco zmieniał treść zadania:

Zadanie 1. 20 robotników potrzebuje 5 dni, aby, pracując dziennie po 12 godzin, wyrobili 375 sztuk pewnego przedmiotu; ileż dni potrzebowaloby 12 robotników, aby wyrobić 600 sztuk tegoż przedmiotu, pracując dziennie tylko po 10 godzin?²³⁴

Zadanie 2. 20 robotników zdoła usypać groblę 375 stóp długą w 5 tygodniach, pracując dziennie po 12 godzin; iluż tygodni potrzebowaloby 12 robotników, aby takąż groblę 600 stóp długą usypali, pracując dziennie tylko po 10 godzin?²³⁵

Zdarzało się też, że przytaczał zadania w niezmienionej formie: „16 (a) robotników potrzebuje 6 (c) dni na wykonanie pewnej roboty, iluż robotników trzeba nająć, aby tę samą robotę w 4 (b) dniach ukończyli?”²³⁶.

Innym przykładem posiłkowania się podręcznikiem Močnika jest następujące zadanie: „funt hamburski kawy kosztuje $6\frac{1}{2}$ szylingów; ileż złr. w. a. wypada zapłacić za $5\frac{1}{4}$ cetnarów wiedeńskich? (100 funt. hamb. = $89\frac{3}{4}$ funt wied.; 100 grzywien banco = $84\frac{1}{4}$ złr. w. a.; 1 grzywna banco = 16 szylingom)”²³⁷.

Močnik, rozwiązując to zadanie, wykorzystał następującą zależność: 100 funtów wiedeńskich = 1 cetnar wiedeński.

Układ.	
x złr. w. a.	5 $\frac{1}{2}$ cetn. wied.
1 cetn. wied.	100 fnt. wied.
89 $\frac{3}{4}$ funtów wied.	100 fnt. hamb. x = $\frac{5\frac{1}{2} \times 100 \times 100 \times 6\frac{1}{2} \times 84\frac{1}{4}}{89\frac{3}{4} \times 16 \times 100}$
1 funt hamb.	6 $\frac{1}{2}$ szyl. = 200·805 złr. w. a.
16 szylingów.	1 grzywna.
100 grzywien.	84 $\frac{1}{4}$ złr. w. a.

Fot. 6. Rozwiązanie zadania z podręcznika Močnika²³⁸

²³³ Franz Močnik. *Arytmetyka i algebra...*, dz. cyt.

²³⁴ Placyd Dziwiński, dz. cyt., s. 107.

²³⁵ Franz Močnik. *Arytmetyka i algebra...*, dz. cyt., s. 131.

²³⁶ Placyd Dziwiński, dz. cyt., s. 104; Franz Močnik. *Arytmetyka i algebra...*, dz. cyt., s. 129.

W podręczniku Močnika w treści tego zadania nie umieszczono liczb w nawiasach, poza tym treść jest identyczna.

²³⁷ Franz Močnik. *Arytmetyka i algebra...*, dz. cyt., s. 136.

²³⁸ Tamże, s. 136.

Bez znajomości tej zależności zadanie byłoby niemożliwe do rozwiązania przy wykorzystaniu reguły łańcuchowej. Placyd Dziwiński umieścił w swoim podręczniku takie samo zadanie, ale w jego treści dopisał zależność między funtami wiedeńskimi a cetnarami²³⁹.

Podobieństwa między podręcznikami Moćnika i Dziwińskiego widać też w trakcie omawiania innych zagadnień z arytmetyki politycznej. Należy jednak podkreślić, że podręcznik Dziwińskiego absolutnie nie jest kopią podręcznika Moćnika. Materiał z podręcznika Moćnika został przez Dziwińskiego znacznie rozszerzony, na przykład o omówienie systemów liczbowych o dowolnej podstawie, zamianę liczb zapisanych w jednym systemie na liczby innego systemu oraz analizę wykonywania działań na tych liczbach²⁴⁰ czy umieszczenie rezultatu Ferdinanda Lindemanna z 1882 r., że π jest liczbą przestępną²⁴¹.

Jeżeli chodzi o kwestię dydaktyki, to bez trudu zauważyć można, że Dziwiński przygotował podręcznik encyklopedyczny, w którym większość zagadnień omówiono teoretycznie i tylko w nielicznych przypadkach umieszczono przykłady zastosowania teorii w praktyce. Z podręcznika Dziwińskiego uczniowie z pewnością nie mogliby uczyć się samodzielnie. Moćnik rozwiązał zdecydowanie więcej przykładów i umieścił więcej wskazówek i dodatkowych objaśnień dotyczących zastosowania teorii w praktyce.

Stefan Banach po omówieniu reguły trzech prostej i składanej przeszedł w swoich podręcznikach do reguły procentu prostej. Zadania ćwiczeniowe „na” regułę procentu, podobnie jak Baraniecki, związał z obrotami pieniężnymi. Rozwiązywał sztandarowe typy zadań. Oznaczywszy przez K kapitał, przez P stopę procentową, przez L liczbę lat, na którą pożyczono kapitał, a przez D dochód po L latach, wyprowadził zależność: $100D = KPL$ ²⁴². Wykorzystał ją między innymi do rozwiązania zadania z fot. 7:

Nie rozważał reguły procentu składanej, choć on sam poznawał ją w szkole średniej. Procent składany omówił jedynie z roczną kapitalizacją odsetek – po raz kolejny więc zakres materiału u Banacha był węższy niż w podręcznikach, z których uczył się w IV Gimnazjum w Krakowie.

Oddzielny paragraf Banach poświęcił zadaniom, w którym należało obliczyć wartość rabatu, brutto, skonto (upust, który płaci detalista hurtownikowi przy

²³⁹ Placyd Dziwiński, dz. cyt., s. 109.

²⁴⁰ Tamże, s. 127–134.

²⁴¹ Tamże, s. 192. Zauważamy, że w tym przypadku absorpcja nowości naukowej do nauczania szkolnego zajęła tylko 9 lat.

²⁴² Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, dz. cyt., s. 99; ciż, *Arytmetyka i geometria dla klasy III szkół średnich*, dz. cyt., s. 113; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 104.

płatności gotówką za towar) i prowizję²⁴³. Zadania tego typu można też znaleźć u Brzostowicza w dziale poświęconym równaniom pierwszego stopnia.

Przykład. W jakim czasie kapitał 3610 zł oddany na 9% przyniesie 1949,4 zł dochodu?

Rozwiązanie. Mamy $D = 1949,4$ zł, $K = 3610$ zł, $P = 9$. Zatem

$$L = \frac{100 \cdot 1949,4}{3610 \cdot 9} = 6.$$

A więc po 6 latach otrzymamy żądany dochód.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x liczbę lat.

(3610 zł na 9%)	przez 1 rok	przyniesie	dochodu	100 . 3610 zł
(" " ")	" x lat	"	"	1949,4 zł.

Ponieważ liczba lat jest proporcjonalna do dochodu, więc:

$$x : 1 = 1949,4 : \frac{3610 \cdot 9}{100}.$$

Zatem $x = 6$.

Fot. 7. Przykładowe zadanie dotyczące reguły procentu umieszczone w podręczniku Banacha²⁴⁴

Na tym kończą się podobieństwa podręczników Banacha oraz Baranieckiego, Brzostowicza i Dziwińskiego. Dalsze omawianie arytmetyki politycznej Banach związał głównie z zaznajamianiem uczniów z instytucjami finansowymi i podstawowymi instrumentami rynku pieniężnego. Matematyka została przez niego odsunięta na dalszy plan.

Banach wyróżnił dwa typy instytucji finansowych: kasy oszczędności i banki. Wyjaśnił ich zadania oraz dokonał podziału na instytucje finansowe prywatne, komunalne i państwowe: „Bank Polski, Poczтовая Kasa Oszczędności i Bank Gospodarstwa Krajowego są instytucjami państwowymi; Miejskie Kasy Oszczędności w Warszawie, Lwowie i Krakowie itd. są instytucjami komunalnymi, prócz tego istnieje wiele banków prywatnych”²⁴⁵. Stwierdził, że w Polsce najwygodniej jest składać oszczędności w Pocztovej Kasie Oszczędności (PKO) i umieścił diagram obrazujący wzrost liczby książeczek oszczędnościowych PKO w latach 1924–1932 (od 58 milionów w 1924 do 954 milionów w 1932 r.). Omówił, w jakich placówkach należy dokonać wkładu oszczędnościowego (między innymi we wszystkich urzędach pocztowych), jak wygląda procedura dokonywania tej

²⁴³ Zadania tego typu zostały umieszczone też u Brzostowicza w dziale poświęconym równaniom pierwszego stopnia.

²⁴⁴ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, dz. cyt., s. 103; ciż, *Arytmetyka i geometria dla klasy III szkół średnich*, dz. cyt., s. 114; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 108.

²⁴⁵ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, dz. cyt., s. 111; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 123.

czynności i jakie jest oprocentowanie wkładu. Scharakteryzował też bezgotówkowe środki zapłaty: czek, blankiety nadawcze i weksle.

Wśród zadań ćwiczeniowych do samodzielnego rozwiązania przez uczniów umieścił następujące:

3. Przemysławiec posiadał konto czekowe, na które składał swe dochody i za pośrednictwem którego uskuteczniał wydatki. Rachunek jego konta przedstawiał się w sposób następujący:

Wpłynęło

Data	Kwota	
	zł	gr
1/II	1600	---
10/II	550	---
20/II	420	---
1/III	840	---
10/III	920	---
20/III	280	---

Wypłacono

Data	Numer czeku	Kwota	
		zł	gr
3/II	26845	65	30
7/II	26846	190	50
11/II	26847	240	---
18/II	26848	85	20
25/II	26849	450	---
5/III	26850	620	50
12/III	26851	115	80
20/III	26852	320	40
28/III	26853	556	20

Oblicz saldo w dniu 1/IV!

Fot. 8. Zadanie dotyczące kont czekowych umieszczone w podręczniku Banacha²⁴⁶

W podręczniku do klasy siódmej szkoły powszechnej Banach omówił również podatki i ubezpieczenia. Wyjaśnił, kto musi płacić podatki i z czym są one związane: „Podatku dochodowego nie płacą ci, których dochód roczny jest niższy od 1500 zł, a przy uposażeniach służbowych niższy od 2500 zł”²⁴⁷. Informacje o ubezpieczeniach społecznych związał głównie z utworzoną przez państwo polskie Ubezpieczalnią Społeczną. Przestrzegł czytelników, że pracownik narażony jest na rozmaite nieszczęścia, takie jak choroba, wypadek przy pracy, śmierć czy bezrobocie, które uniemożliwia mu zarobkowanie. Przedstawił też procedury wypłacania ubezpieczenia.

Wszystkie wymienione zagadnienia Banach omówił głównie teoretycznie. Zadania, jeśli się w ogóle pojawiały, utrzymane były na elementarnym poziomie trudności, na przykład „wypełnij blankiet”, „oblicz saldo”, czy: „Kup w Urzędzie Pocztowym blankiet nadawczy i wypełnij go na kwotę 20 zł, którą chcesz przesłać panu M.N., będącemu właścicielem konta Nr 345600”²⁴⁸.

²⁴⁶ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, dz. cyt., s. 115; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 128.

²⁴⁷ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 133.

²⁴⁸ Stefan Banach, Wacław Sierpiński, Włodzimierz Stożek, *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, dz. cyt., s. 117; ciż, *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, dz. cyt., s. 130.

Banach nie omawiał procentu składanego z półroczną i miesięczną kapitalizacją odsetek, rachunku wkładek, rachunku rent; nie obliczał też wysokości ubezpieczeń. Mimo że wprowadzanie tych zagadnień do podręczników szkolnych nie było nakazanie ministerialnie, to wszystkie zostały umieszczone w podręcznikach Jerzego Miłułowicza²⁴⁹, których używano w polskich szkołach średnich równoległe z podręcznikami Banacha²⁵⁰.

5. Konkluzje

Stefan Banach przygotował łącznie dziesięć podręczników szkolnych: siedem wspólnie z Wacławem Sierpińskim i Włodzimierzem Stożkiem, jeden tylko z Włodzimierzem Stożkiem i dwa samodzielnie.

Na treść umieszczoną w podręcznikach, których autorem bądź współautorem był Stefan Banach, mogły mieć wpływ: matematyka, którą sam poznawał w IV Gimnazjum w Krakowie, doświadczenie, które nabył w trakcie udzielania korepetycji z matematyki, jego własne poglądy na temat nauczania tego przedmiotu, zarządzenia polskiego Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego oraz jego naukowa wiedza z matematyki.

W 1902 r. Stefan Banach rozpoczął naukę w IV Gimnazjum w Krakowie. Szkoła ta została utworzona w oparciu o tradycje i kadrę nauczycielską najstarszej szkoły świeckiej na ziemiach polskich, czyli Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie. W chwili otwarcia IV Gimnazjum, czyli na początku roku szkolnego 1901/1902, uczęszczało do niej 455 uczniów, a w gronie pedagogicznym zasiadało 24 nauczycieli (połowa z nich związana była z Gimnazjum Świętej Anny), z czego 21% stanowili nauczyciele z tytułem doktora. Znacznie przewyższało to średnią – w latach 1850–1918 w całej Galicji stopień doktora posiadało jedynie 8% wszystkich nauczycieli.

Na przełomie XIX i XX w. szkołami średnimi z najwyższym poziomem nauczania były gimnazja i szkoły typu realnego. Gimnazja były szkołami o profilu humanistycznym, a szkoły typu realnego – matematyczno-przyrodniczym. W szkołach typu realnego zakres nauczania matematyki był szerszy niż w gimnazjach, co stanowiło głównie konsekwencję nauczania w nich geometrii wykresnej (zagadnienia tego nie wprowadzano w gimnazjach). Mimo to matematycy, tacy jak Stefan Banach i Leon Jeśmanowicz, bardziej cenili wykształcenie gimnazjalne, uważając, że było ono bardziej wszechstronne. Podkreślali też znaczenie łaciny. Uważali, że kształcenie humanistyczne mogło nawet lepiej przygotowywać młodzież do studiów matematycznych – tłumaczenie zdań z języka polskiego na

²⁴⁹ Jerzy Miłułowicz, *Podręcznik arytmetyki i algebry dla V klasy gimnazjów*, wyd. 5, Lwów–Warszawa 1927; tenże, *Podręcznik arytmetyki i algebry dla VI klasy gimnazjów*, Lwów–Warszawa 1923; tenże, *Podręcznik arytmetyki dla klasy VII*, Lwów 1918.

²⁵⁰ Podręczników Jerzego Miłułowicza używano np. w Gimnazjum w Bielsku (*Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum w Bielsku*, Bielsko 1929–1931).

lacinę uczyło logicznego myślenia. Zapewne był to jeden z głównych powodów, dla których opiekunowie Banacha zdecydowali się posłać go do gimnazjum.

W IV Gimnazjum w Krakowie, gdy jego uczniem był Stefan Banach, realizowano takie same programy nauczania, jak w innych gimnazjach galicyjskich w tym okresie, na przykład w Gimnazjum Świętej Anny w Krakowie. Można przypuszczać, że matematyki nauczano tam z dużą skrupulatnością. Nauczycielami matematyki Banacha byli: Jerzy Smoleński, Roman Gutwiński, doktor Kamil Kraft, Antoni Zmora i Stanisław Ziobrowski. Wszyscy ukończyli studia w zakresie nauk matematyczno-przyrodniczych. Trzech z nich: Jerzy Smoleński, doktor Kamil Kraft i Stanisław Ziobrowski, prowadziło jednocześnie działalność naukową, która zaowocowała zatrudnieniem ich na uczelniach wyższych. Kamil Kraft i Stanisław Ziobrowski zaangażowali się też w przygotowanie reformy nauczania matematyki dla polskich szkół średnich. IV Gimnazjum w Krakowie w szkolnym okresie Stefana Banacha przygotowywano do przemiany w Gimnazjum Realne. Ostatecznie doszło do niej z początkiem roku 1910/1911 po sprawdzeniu poziomu nauczania matematyki przez specjalnie delegowanych w tym celu wizytatorów szkolnych.

Kamil Kraft i Stanisław Ziobrowski, opracowując projekt reformy nauczania matematyki, przeznaczony dla polskich szkół średnich, wskazali mankamenty nauczania matematyki w gimnazjach Galicji na przełomie XIX i XX w., w tym przeładowanie materiału, schematyczność zadań i koncentracja nauczania arytmetyki na wykształceniu mechanicznej wprawy w rachowaniu. W polskich szkołach planowano ograniczyć zakres omawianego materiału i położyć nacisk na zadania ukazujące zastosowania matematyki w życiu codziennym. Zalecano pogłębioną naukę matematyki i stopniowe wprowadzanie trudności. Podobne uwagi związane z nauczaniem matematyki wypowiadał Stefan Banach już jako profesor Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Znalazło to odzwierciedlenie w materiale, który umieścił w przygotowanych przez siebie podręcznikach.

W artykule dokonano szczegółowej analizy treści zawartych w podręcznikach Stefana Banacha ze względu na: sposób omawiania równań, wprowadzenie podstawowych pojęć geometrycznych do nauczania szkolnego i zakres omawiania zagadnień z arytmetyki politycznej. Pierwsze i trzecie zagadnienie w podręcznikach Banacha przedyskutowano w zdecydowanie węższym zakresie niż w podręcznikach, z których autor korzystał w IV Gimnazjum w Krakowie. I tak w podręcznikach, które wykorzystywał w szkole średniej, omówione: równania pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia, równania wykładnicze i logarytmiczne oraz teorię związaną z rozwiązywaniem równań dowolnego stopnia. W podręcznikach, które Banach przygotował jako autor bądź współautor, materiał obejmował jedynie rozwiązywanie równań pierwszego i drugiego stopnia. Arytmetyka polityczna w podręcznikach, których używał w IV Gimnazjum, obejmowała: regułę trzech prostą i składaną, regułę łańcuchową, regułę spółki,

regułę procentu, omówienie weksli, obliczanie rabatów, prowizji i tym podobnych, rachunki związane z procentem prostym i procentem składanym (z roczną, półroczną i miesięczną kapitalizacją), rachunek wkładek oraz rachunek rent i ubezpieczeń na życie. Wszystkie te zagadnienia omawiano tam w sposób *stricte* matematyczny – podawano metody rozwiązywania poszczególnych zagadnień. U Banacha arytmetyka polityczna obejmowała regułę trzech prostą i składaną, weksle, obliczanie rabatów, skonta, prowizji i tym podobnych oraz rachunki dotyczące procentu prostego i procentu składanego, ale tylko z roczną kapitalizacją odsetek (bez omawiania rachunku wkładek). Dalsze kwestie dotyczyły rodzajów i charakterystyki instytucji kredytowych oraz bezgotówkowych środków zapłaty. Rozważania poświęcone arytmetyce politycznej Banach zakończył uwagami związanymi z ubezpieczeniami – omówił, gdzie należy się ubezpieczać, wskazał, kto jest zobowiązany do płacenia składek ubezpieczeniowych, i scharakteryzował procedury wypłacania ubezpieczeń. Zagadnienia te Banach przedstawił już czysto teoretycznie, rozwiązał niewiele zadań ćwiczeniowych, a te, które się pojawiały (na przykład „oblicz saldo konta czekowego”), wymagały zastosowania elementarnych umiejętności. Wprowadzenie do geometrii zarówno w podręcznikach używanych w IV Gimnazjum w Krakowie, jak i w podręcznikach Banacha obejmowało podobny zakres materiału.

Na zakres zagadnień omówionych w podręcznikach Banacha duży wpływ, obok jego własnych poglądów, miały zarządzenia Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Ministerstwo wskazało typy równań oraz zbiór liczbowy, w którym miały one być rozwiązywane (zbiór liczb rzeczywistych). W tym zakresie Banach w pełni dostosował się do zarządzeń ministerialnych. Nie widać tutaj oznak wzorowania się na podręcznikach, z których korzystał w IV Gimnazjum w Krakowie. Zarządzenia ministerialne zalecały poglądowe wprowadzenie do geometrii, jednakże nie określały sposobu jego realizacji. Okazuje się, że swoje rozważania Banach w dużej mierze oparł na treściach zawartych w podręczniku *Geometria poglądowa. Podręcznik na klasę 1 gimnazjów, gimnazjów realnych i szkół realnych* Ignacego Kranza, wydanym w 1917 r., czyli już po ukończeniu przez niego szkoły średniej. Dokonując wprowadzenia do geometrii, Banach nie zastosował żadnych innowacyjnych rozwiązań. Zgodnie z zaleceniami ministerstwa zagadnienia z arytmetyki politycznej miały obejmować regułę trzech i procenty. Omawiając te zagadnienia w swoim podręczniku, Banach wyraźnie wzorował się na pierwszej części *Podręcznika arytmetyki i początków algebry w czterech częściach dla uczniów klas niższych gimnazjów i szkół realnych w Galicyi* Mariana Baranieckiego (1894). Zakres omawiania tego zagadnienia poszerzył o analizę instytucji finansowych i instrumentów rynku pieniężnego, takich jak чеки, blankiety nadawcze i weksle. Warto zaznaczyć, że w podręcznikach Jerzego Miłulowicza, które wykorzystywano w polskich szkołach równoległe z podręcznikami Banacha, arytmetyka polityczna

omówiona była niemalże w takim samym zakresie, jak w podręczniku Placyda Dziwińskiego.

Stefan Banach, przygotowując podręczniki szkolne, był już profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie i uznanym naukowcem, Wacław Sierpiński – profesorem Uniwersytetu Warszawskiego, Włodzimierz Stożek – najpierw doktorem, a następnie profesorem Politechniki Lwowskiej. Można byłoby się spodziewać, że skoro za przygotowanie podręczników bierze się trzech wybitnych matematyków, to będą one wyróżniały się zakresem omówionego materiału, metodami realizacji wybranych zagadnień czy wprowadzaniem ciekawostek i nowości naukowych – jak choćby w przypadku podręcznika Placyda Dziwińskiego, profesora Szkoły Politechnicznej we Lwowie, w którym autor zaprezentował oryginalne podejście do omawiania równań, głównie ze względu na zastosowanie twierdzenia Abela–Ruffiniego, i wplatał nowości naukowe, takie jak rezultat Lindemanna, stanowiący, że jest π liczbą przestępną.

W podręcznikach, których autorem bądź współautorem był Stefan Banach, w zakresie zagadnień omawianych w niniejszym artykule nie wprowadzono nowych rozwiązań. Nie umieszczono w nich nowości naukowych, a metody realizacji zagadnień były standardowe, zaczerpnięte wprost z zarządzeń ministerialnych lub innych podręczników szkolnych. W przypadku arytmetyki politycznej rozważania czysto matematyczne prowadzono wręcz na mniejszą skalę niż w innych ówczesnych podręcznikach. Być może wpływ na to miał pośpiech w przygotowaniu podręczników, o którym wspominał Kazimierz Szałajko, a być może to, że Banach nie miał doświadczenia pedagogicznego. Placyd Dziwiński pracował wcześniej jako nauczyciel w szkołach średnich we Lwowie i Jarosławiu, w związku z czym podręcznik przygotowywał z punktu widzenia praktyka. Sierpiński i Stożek również mieli za sobą praktykę nauczycielską. Banach przygotowywał podręczniki jako naukowiec teoretyk. Wprawdzie udzielał korepetycji z matematyki, ale ze względu na brak odpowiednich źródeł trudno jednoznacznie stwierdzić, jak wpłynęło to na kształt jego podręczników.

Bibliografia

- Albiński M., *Wspomnienia o Banachu i Wilkoszu*, „Wiadomości Matematyczne” 1976, t. 19, nr 1, s. 133–135.
- Banach S., *Algebra dla III klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa, 1935.
- Banach S., *Algebra dla IV klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1936.
- Banach S., Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka dla I klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1933.
- Banach S., Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria dla V klasy szkoły powszechnej*, Lwów–Warszawa 1933.

- Banach S., Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria dla VI klasy szkoły powszechnej*, Edynburg 1945.
- Banach S., Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria dla VII kl. szkoły powszechnej*, Lwów–Warszawa 1935.
- Banach Stefan, Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria dla klasy I szkół średnich*, Lwów 1929.
- Banach S., Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria dla klasy II szkół średnich*, Lwów 1930.
- Banach S., Sierpiński W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria dla klasy III szkół średnich*, Lwów–Warszawa 1931.
- Banach S., Stożek W., *Algebra dla II klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa, 1934.
- Banach S., *Sur le problème de mesure*, „Fundamenta Mathematicae” 1923, t. 4, s. 66–89.
- Banach S., *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*, „Fundamenta Mathematicae” 1922, t. 3, s. 128–132.
- Banach S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales (Thèse de doctorat)*, „Fundamenta Mathematicae” 1922, t. 3, s. 133–181.
- Baraniecki M., *Podręcznik arytmetyki i początków algebry w czterech częściach dla uczniów klas niższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji*, cz. 1, Kraków 1894.
- Baraniecki M., *Podręcznik arytmetyki i początków algebry w czterech częściach dla uczniów klas niższych gimnazjów i szkół realnych w Galicji*, cz. 2, Kraków 1894.
- Barciński A., *O rachunkowości kupieckiej*, t. 1: Arytmetyka handlowa, Warszawa 1833.
- Bilewicz-Kuźnia B., *Dar zabawy. Metodyka i propozycje zajęć z dziećmi według założeń pedagogicznych Froebela*, Lublin 2014.
- Biskup M. (red.), *Wybitni ludzie dawnego Torunia*, Warszawa–Poznań–Toruń 1982.
- Blader S., *Rozwiązania zadań matematycznych zawartych w „Zbiorze” prof. I. Kranza*, Stanisławów 1905.
- Bleibtreu L.C., *Politische Arithmetik: Anleitung zur Kenntnis und Übung aller im Staatswesen vorkommenden Berechnungen*, Heidelberg 1853.
- Bobrowska-Nowak W., *Historia wychowania przedszkolnego*, Warszawa 1978.
- Brzeziński J., *Ś.p. Prof. Stanisław Ziobrowski*, „Ogrodnictwo. Organ Towarzystwa Ogrodniczego w Krakowie” 1923, t. 19, s. 193–194.
- Brzostowicz K., *Początki arytmetyki i algebry dla niższych klas szkół średnich*, cz. 2 (na klasę III. i IV.), Sanok 1896.
- Chodakowska J., *Udział Towarzystwa Nauczycieli Szkół Wyższych w walce o polską szkołę średnią w Galicji w latach 1884–1914*, „Rozprawy z dziejów oświaty” 1984, t. 26, s. 141–172.
- Ciesielski K., *O pewnych faktach z życia Stefana Banacha*, „Zeszyty naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. S. Staszica, Opuscula Mathematica” 1993, nr 13, s. 59–69.
- Colerus E., *Od tabliczki do różniczki. Matematyka dla wszystkich*, tłum. Antoni Nykliński, Lwów 1938.
- Czajewicz A., *Tablice służące do przeprowadzania rachunków amortyzacyjnych w tych wypadkach, gdy kapitał jest oprocentowanym z góry*, Warszawa 1902.
- Czech J., *Krótki wykład arytmetyki*, Wilno 1807.
- Danielewicz Adam B., Dickstein S., *Zarys arytmetyki politycznej*, Warszawa 1910.
- Danielewicz A.B., *Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych*, Warszawa 1896.

- Dawidowicz A., *Wspomnienia o Leonie Chwistku, Hugonie Steinhausie i Włodzimierzu Stożku*, „Wiadomości Matematyczne” 1981, t. 23, nr 2, s. 232–240.
- Dawidowiczowa (z Chwistków) A., *Zeschnięte liście i kwiat... Wspomnienia*, Kraków 1989.
- Dropiowski T., Kraft K., Łopuszański T. (i inni), *Nasza szkoła średnia – krytyka jej podstaw i konieczność reformy*, cz. 1, „Muzeum. Czasopismo Poświęcone Sprawom Wychowania i Szkolnictwa” 1906, t. 22, nr 1, s. 191–214.
- Dropiowski T., Kraft K., Łopuszański T. (i inni), *Nasza szkoła średnia – krytyka jej podstaw i konieczność reformy*, cz. 2, „Muzeum. Czasopismo Poświęcone Sprawom Wychowania i Szkolnictwa” 1906, t. 22, nr 2, s. 92–145.
- Domoradzki S., *Stefan Banach's textbooks (in 60th memory of death)*, [w:] *Matematyka v škole dnes a zajtra*, red. J. Gunčaga, Z. Takáč, Ružomberk 2005, s. 46–50.
- Domoradzki S., Karpińska K., *O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku*, „Antiquitates Mathematicae” 2017, t. 11, s. 157–201.
- Duda R., *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Warszawa 2019.
- Duda R., *Lwowska szkoła matematyczna*, Wrocław 2014.
- Duda R., *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*, Wrocław 2012.
- Duda R., *Prawda i mity o pochodzeniu Banacha*, „Wiadomości Matematyczne” 2009, t. 45, nr 2, s. 281–294.
- Dziwiński P., *Zasady algebry dla wyższych klas gimnazjów i szkół realnych*, Lwów 1891.
- Ebert J.J., *Anfangsgründe der nothwendigsten Theile der Mathematik*, Leipzig 1787.
- Freytag A., *Architectura Militaris Nova Et Aucta, Oder Neue Vermehrte Fortification, Von Regular Vestungen, Von Irregular Vestungen und Aussen Wercken*, Leyden 1631.
- Gołąb-Meyer Z., *Edukacja szkolna w Cesarstwie Austro-Węgierskim w czasach Mariana Smoluchowskiego*, „Foton” 2017, nr 137, s. 22–33.
- Grunert J.A., *Lehrbuch der Mathematik für die mittlern Classen höherer Lehranstalten*, Brandenburg 1851.
- Hajłasz P., *Stefan Banach o swoim ojcu*, „Delta” 1992, nr 1; Zob. <http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/pdf/o-banachu/hajlasz92.pdf> [dostęp 15.03.2020].
- Jakimowicz E., *A Remarkable Life*, [w:] *Stefan Banach: Remarkable Life, Brilliant Mathematics*, red. Emilia Jakimowicz, Adam Miranowicz, Gdańsk 2010, s. 1–28.
- Jeśmanowicz L., *Wspomnienia o matematykach wileńskich*, „Wiadomości Matematyczne” 1871, t. 12, nr 2, s. 309–319.
- Kałuża R., *Stefan Banach*, Warszawa 1992.
- Kałuża R., *Through a reporter's eyes: The Life of Stefan Banach*, Boston–Basel–Berlin 1996.
- Kambly L., *Die Elementar Mathematik*, cz. 1: Arithmetik und Algebra (wyd. 21), cz. 2: Planimetrie (wyd. 44), cz. 3: Ebene und Sphärische Trigonometrie (wyd. 13), cz. 4: Stereometrie (wyd. 10), Breslau, od 1876 do 1878.
- Kielski B., *Szkolnictwo w Polsce, jego postęp i główne zagadnienia*, „Oświata i wychowanie” 1929, nr 5, s. 461–475.
- Komarzyniec G., *Nauczanie matematyki w krakowskiej Szkole Nowodworskiej*, Kraków 2004.
- Koppe K., *Anfangsgründe der reinen Mathematik für der Schul- und Selbst-Unterricht*, cz. 1: Arithmetik und Algebra (wyd. 4), cz. 2: Planimetrie (wyd. 4), cz. 3: Stereometrie (wyd. 7), cz. 4: Ebene Trigonometrie (wyd. 5), Essen, od 1852 do 1871.

- Kranz I., *Geometria poglądowa. Podręcznik na klasę 1 gimnazyów, gimnazjów realnych i szkół realnych*, wyd. 2, Kraków 1917.
- Kranz I., *Zbiór zadań matematycznych. Podręcznik dla wyższych klas szkół średnich*, Kraków 1902.
- Kubik K., *Nauczanie matematyki w toruńskim Gimnazjum Akademickim w XVI–XVIII w.*, [w:] *Księga Pamiątkowa 400-lecia Toruńskiego Gimnazjum Akademickiego*, t. 1: XVI–XVIII w., red. Z. Zdrójkowski, Toruń 1972.
- Kuratowski K., *Notatki do autobiografii*, Warszawa 1981.
- Legendre A.-M., *Początki geometrii dla szkół powiatowych na klasę pierwszą*, tłum. A. Wyrwicz, Wilno 1825.
- L'Huilier S., *Geometria dla Szkół Narodowych*, cz. 1, W Drukarni Nadworney J.K. Mci, 1780.
- L'Huilier S., *Geometria dla Szkół Narodowych*, cz. 2, W Drukarni Nadworney J.K. Mci, 1781.
- Łomnicki A., *Geometria. Podręcznik dla szkół średnich*, cz. 1: Planimetria – Stereometria, wyd. 3, Lwów–Warszawa 1920.
- Maligranda L., *Review of the book by Mariusz Urbanek, „Genialni – Lwowska Szkoła Matematyczna” (Polish) [Geniuses – the Lvov school of mathematics]*, „Matematyczne Studia” 2018, t. 50, nr 1, s. 105–112.
- Mazur S., *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, „Wiadomości Matematyczne” 1961, t. 4, nr 3, s. 249–250.
- Mehler F.G., *Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen* (wyd. 4), Berlin 1869.
- Mihułowicz J., *Podręcznik arytmetyki dla klasy VII*, Lwów 1918.
- Mihułowicz J., *Podręcznik arytmetyki i algebry dla V klasy gimnazjów*, wyd. 5, Lwów–Warszawa 1927.
- Mihułowicz J., *Podręcznik arytmetyki i algebry dla VI klasy gimnazjów*, Lwów–Warszawa 1923.
- Moćnik F., *Arytmetyka i algebra dla klas wyższych gimnazjalnych i realnych*, tłum. Tomasz Stanecki, Lwów 1872.
- Moćnik F., *Geometria dla klas wyższych szkół średnich*, wyd. 6, Lwów 1906.
- Moćnik F., *Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich*, cz. 1, tłum. G. Maryniak, wyd. 9, Lwów 1906.
- Moćnik F., *Geometria poglądowa dla klas niższych szkół średnich*, cz. 2, tłum. G. Maryniak, wyd. 6, Lwów 1902.
- Moćnik F., *Początki geometrii*, wyd. 3, tłum. T. Sternal, Lwów 1872.
- Nikliborc W., Stożek W., *Algebra dla III klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1935.
- Nikliborc W., Stożek W., *Algebra dla IV klasy gimnazjalnej*, Lwów–Warszawa 1936.
- Nikliborc W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria, dla IV klasy szkół powszechnych I stopnia, Kurs A*, Lwów–Warszawa 1938.
- Nikliborc W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria, dla IV klasy szkół powszechnych I stopnia, Kurs B*, Lwów–Warszawa 1937.
- Nikliborc W., Stożek W., *Arytmetyka i geometria, dla IV klasy szkół powszechnych I stopnia, Kurs C*, Lwów–Warszawa 1938.

- Nikonowicz D., *Stefan Banach (1892–1945)*, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli” 1992, t. 45, nr 2, s. 68–90.
- Nowak T., *Przegląd polskiego piśmiennictwa dziedziny fortyfikacji i inżynierii wojskowej w XVI–XVIII w.*, „Studia i materiały do historii wojskowości” 1965, t. 11, cz. 2.
- Oettinger L., *Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen*, Braunschweig 1845.
- Pawlikowska-Brożek Z., *Stefan Banach w świetle wspomnień*, [w:] *Materiały z IV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki pt. „Matematyka przełomu XIX i XX wieku”*, red. Stanisław Fudali, Szczecin 1990.
- Piórek J., *Z protokołów Towarzystwa Matematycznego w Krakowie*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” 1989, t. 3, s. 4–10.
- Pleśniarski B., *Szkolnictwo Departamentu Bydgoskiego w okresie Księstwa Warszawskiego*, Toruń 1965.
- Przeniosło M., *Dochody nauczycieli państwowych szkół akademickich w II Rzeczypospolitej (na przykładzie matematyków)*, „Roczniki dziejów społecznych i gospodarczych” 2008, t. 68, s. 35–63.
- Przeniosło M., *Droga naukowa Stefana Banacha (okres międzywojenny)*, [w:] *Znani i nieznani międzywojennego Lwowa*, red. M. Przeniosło, L. Michalska-Bracha, Kielce 2007, s. 35–52.
- Rakoczy-Pindor K., *Wykształcenie nauczyciela gimnazjalnego matematyki w Galicji w latach 1850–1918*, [w:] *Dzieje matematyki polskiej*, red. W. Wiśław, Wrocław 2012, s. 163–172.
- Rozmarynowicz T., *Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy, w zastosowaniu do urzędzenia kas emerytalnych*, Warszawa 1886.
- Samójło J., *Dziwiński Placyd Zasław*, [w:] *Polski słownik biograficzny*, red. Władysław Konopczyński i in., Wrocław–Warszawa–Kraków 1935–2020, t. 6, nr 26, s. 184–185.
- Sierżputowski T., *Arytmetyka*, cz. 1, wyd. 9, Lwów–Warszawa 1931.
- Sobolew S.L., *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, „Wiadomości Matematyczne” 1961, t. 4, nr 3, s. 261–264.
- Steinhaus H., *Stefan Banach*, „Nauka Polska” 1960, t. 8, nr 4, s. 150–159.
- Steinhaus H., *Wspomnienia i zapiski*, wyd. 3, Wrocław 2010.
- Szałajko K., *Wspomnienia lwowskie*, „Wiadomości Matematyczne” 1904, t. 30, s. 251–263.
- Średniawa B., *Władysław Natanson (1864–1937), Fizyk, który wyprzedził swoją epokę (w sześćdziesięciolecie śmierci i setną rocznicę publikacji pracy „O prawach zjawisk nieodwracalnych”)*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 1997, t. 42, nr 2, s. 3–22.
- Średniawa B., *Recepcja szczególnej i ogólnej teorii względności w Polsce*, [w:] *Recepcja w Polsce nowych kierunków i teorii naukowych*, red. A. Strzałkowski, Kraków 2001.
- Turski Ł.A., *Kłęska nauczania matematyki i przedmiotów ścisłych w Polsce w XX wieku. Co można z tym zrobić?*, „Wiadomości Matematyczne” 2016, t. 52, nr 1, s. 69–76.
- Wiese L., *Verordnungen und Gesetze für höheren Schulen in Preussen*, Berlin 1867.
- Wiśław W., *Listy Wacława Sierpińskiego do Stanisława Ruzewicza*, „Wiadomości Matematyczne” 2004, t. 40, s. 139–168.
- Wiśław W., *Matematyka polska epoki Oświecenia*, Warszawa 2007.

- Wójcik W., *Banach Stefan*, [w:] *Polski wkład w przyrodoznawstwo i technikę. Słownik polskich i związanych z Polską odkrywców, wynalazców oraz pionierów nauk matematyczno-przyrodniczych i techniki*, red. B. Orłowski, Warszawa 2015–2019, t. 1, s. 74.
- Wuczyńska K., *O podręcznikach szkolnych Stefana Banacha*, „*Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli*” 1992, nr 2, s. 96–100.
- Zubelowicz F.A., *Rachunkowość handlowa w ważniejszych jej zastosowaniach*, Warszawa 1846.
- Zydzler J., *Geometria w zakresie szkoły średniej*, wyd. 19, Warszawa 1933.
- Mowa ustępującego rektora politechniki we Lwowie p. Niedźwiedzkiego przy otwarciu roku naukowego 1885/6*, „*Czasopismo Techniczne*” 1885, t. 3, nr 11, s. 134–135.
- Plan nauk szkół departamentowych 1812 roku*, 1812.
- Program Gimnazjum Państwowego. Gimnazjum Niższe. Matematyka*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1920.
- Program Gimnazjum Państwowego. Wydział Matematyczno-Przyrodniczy*, wyd. 5, Lwów 1931.
- Program nauki w szkołach powszechnych siedmioklasowych. Rachunki z geometrią*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1920.
- Program naukowy szkoły średniej, projekt wypracowany przez Sekcję szkolnictwa średniego*, Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1919.
- Программы преподавания учебных предметов въ мужскихъ гимназіяхъ и прогимназіяхъ Варшавскаго учебнаго округа, въ казенной типографіи ВРПІ Варшавскомъ учебномъ округѣ*, Warszawa 1868.
- Rozporządzenie Ministra Skarbu z dnia 31 października 1935 r. o zmianie rozporządzenia z dnia 30 października 1933 r. o sprzedaży wyrobów tytoniowych*, [w:] *Dziennik Urzędowy Ministerstwa Skarbu*, nr 32, 1935.
- Spis członków „Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika” w dniu 19 lutego 1893*, „*Kosmos. Czasopismo Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika*” 1893, t. 18, s. 61–64.
- Spis członków Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika w r. 1910*, „*Kosmos*” 1911, t. 36, nr 1–2.
- Spis członków polskiego Towarzystwa przyrodników imienia „Kopernika” w dniu 16 lutego 1891*, „*Kosmos. Czasopismo Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika*” 1891, t. 16, s. 41–64.
- Szematyzm Królestwa Galicyi i Lodomeryi z Wielkim Księstwem Krakowskim na rok 1876*, Lwów 1876.
- Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen und der höheren Bürgerschulen*, Berlin 1859.
- Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Cultus und Unterricht*, Wien 1870.
- Wykaz członków*, „*Rocznik Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Przemysłu*” 1923, t. 4, s. 135–139.

Sprawozdania szkolne

- I. Sprawozdanie Dyrekcyi C.K. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1902*, Kraków 1902.
- II. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV w Krakowie za rok szkolny 1903*, Kraków 1903.
- III. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1904*, Kraków 1904.
- IV. Sprawozdanie Dyrekcyi c. k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1905*, Kraków 1905.
- V. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1906*, Kraków 1906.
- VI. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1907*, Kraków 1907.
- VII. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908*, Kraków 1908.
- VII-me Sprawozdanie Państwowego Gimnazjum Koedukacyjnego Humanistycznego im. ks. Grzegorza Piramowicza w Dziśnie za lata szkolne 1930/31–1932/33*, Wilno 1933.
- VIII. Sprawozdanie c.k. Dyrekcyi Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1908/9*, Kraków 1909.
- IX. Sprawozdanie Dyrekcyi c.k. Gimnazjum IV. w Krakowie za rok szkolny 1910*, Kraków 1910.
- Doniesienie o nowouorganizowanem Krolewskim Gimnazjum w Poznaniu*, Poznań 1804.
- Dziewiętnaste sprawozdanie Dyrekcyi c.k. wyższej szkoły realnej we Lwowie za rok szkolny 1892*, Lwów 1892.
- Gymnasium mit Realschule I Ordnung zu Thorn*, Thorn 1878.
- Jahresbericht über das Königl. Progymnasium in Dt. Crone*, P. Garms, Deutsch-Crone 1844.
- Jahresbericht über das Königliche Katholische Gymnasium zu Braunsberg*, C. Heyne, Braunsberg 1850.
- Königliches evangelisches Gymnasium und Realschule erster Ordnung zu Thorn*, Thorn 1863.
- Königliches Gymnasium in Bromberg*, Bromberg 1885.
- Königliches Gymnasium mit Realgymnasium zu Thorn*, Thorn 1885.
- Materye z nauk w Gymnazium Wołyńskiem przez przeciąg roku szkolnego wyłożonych*, 1809.
- Materye z Nauk w Gymnazium Wołyńskiem przez Przeciąg Roku Szkolnego wyłożonych*, Krzemieniec 1809, 1815, 1818.
- Na Publiczny Popis Uczniów Królewskiego Liceum Warszawskiego... zaprasza Prześwietną Publiczność... M. Samuel Bogumił Linde...*, Warszawa 1806.
- Ośmnaste sprawozdanie Dyrekcyi c.k. wyższej szkoły realnej we Lwowie za rok szkolny 1891*, Lwów 1891.
- Popis Roczny z nauk dawanych w szkołach warszawskich XX. Scholarum Piarum odprawiony w miesiącu lipcu roku 1798*, Warszawa 1798.
- Sprawozdanie I. (XVIII.) Dyrekcyi Gimnazjum IV. Realnego im. Henryka Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1918/1919*, Kraków 1919.

- Sprawozdanie X. (XXVII.) Dyrekcji Państwowego Gimnazjum IV. im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1927/1928, Kraków 1928.*
- Sprawozdanie X. C.K. Dyrekcji Gimnazjum IV. (Realnego) w Krakowie za rok szkolny 1910/11, Kraków 1911.*
- Sprawozdanie XI. (XXVIII.) Dyrekcji Państwowego Gimnazjum IV. im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1928/1929, Kraków 1929.*
- Sprawozdanie XI. C.K. Dyrekcji Gimnazjum Realnego (IV.) w Krakowie za rok szkolny 1911/12, Kraków 1912.*
- Sprawozdanie XIV. (XXXI.) Dyrekcji Państwowego Gimnazjum IV. im. H. Sienkiewicza w Krakowie za rok szkolny 1931/1932, Kraków 1932.*
- Sprawozdanie c. k. Rady szkolnej krajowej o stanie szkół średnich galicyjskich w latach szkolnych 1875–1883, cz. 2, Lwów 1885.*
- Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1901/2, Lwów 1902.*
- Sprawozdanie C.K. Rady Szkolnej Krajowej o stanie Szkół Średnich Galicyjskich w roku szkolnym 1902/3, Lwów 1903.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum Arcyksiężn. Elżbiety w Samborze, Sambor 1893.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum I. im. Juliusza Słowackiego w Przemyśle, Przemyśl 1927–1931, 1933–1937.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum I. w Przemyśle, Przemyśl 1921.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum II im. K. Szajnoch w Lwowie, Lwów 1927.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum XII im. Stan. Szczepanowskiego we Lwowie za rok szkolny 1928/29, Lwów 1928.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum im. Jana Kasprowicza w Inowrocławiu za lata szkolne 1932/33–1935/36, Poznań 1936.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum w Bielsku, Bielsko 1929, 1930, 1931.*
- Sprawozdanie Dyrekcji Państwowego Gimnazjum w Bielsku, Bielsko 1929–1931.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. I Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1905, Kraków 1905.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. I Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za rok 1910, Kraków 1910.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum w Gorlicach za rok szkolny 1914, Gorlice 1914.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum w Wadowicach za rok szkolny 1911, Wadowice 1911.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum z wykładowym językiem polskim w Przemyśle, Przemyśl 1914, 1916–1918.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Wyższej Szkoły Realnej w Krakowie za r. 1902, Kraków 1902.*
- Sprawozdanie Dyrekcji c.k. wyższej szkoły realnej w Stanisławowie, Stanisławów 1887.*
- Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie, Kraków 1874.*
- Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie, Kraków 1900.*
- Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1899, Kraków 1899.*

Sprawozdanie Dyrektora C.K. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1901, Kraków 1901.

Sprawozdanie Dyrektora C.K. Gimnazjum Nowodworskiego czyli św. Anny w Krakowie za rok szkolny 1902, Kraków 1902.

Sprawozdanie Dyrektora c.k. Gimnazjum św. Jacka w Krakowie, Kraków 1877.

Sprawozdanie Osiemnaste Dyrekcyi c.k. Gimnazjum III. w Krakowie za rok szkolny 1901, Kraków 1901.

Ueber einige Hindernisse und Förderungs-Mittel der Jugendbildung. Zur Ankündigung der den dritten und vierten October zu haltenden öffentlichen Prüfung der sammtlichen Classen des Gymnasiums zu Bromberg, Bromberg 1823.