

P i o t r D e h n e l

Człowiek-maszyna, maszyna-człowiek. Wittgenstein a Turing

Słowa kluczowe: dowód przekątniowy, filozofia matematyki, maszyna, myślenie, sprzeczność

Ludwig Wittgenstein i Alan Turing spotkali się w Cambridge w 1937 roku. Oficjalnie poznał ich wspólny znajomy, matematyk Alister Watson, ale widywali się już wcześniej w Klubie Nauk Moralnych. Czasami spacerowali po ogrodzie botanicznym, prowadząc zapewne rozmowy na fundamentalne kwestie. Niektóre z nich mogły dotyczyć właśnie opublikowanego artykułu Turinga *On Computable Numbers (O liczbach obliczalnych)*, w którym rozwiązał w sposób błyskotliwy tzw. problem rozstrzygalności (niem. *Entscheidungsproblem*) Davida Hilberta. Było to bez wątpienia wielkie osiągnięcie. Kopię swojego artykułu Turing przesłał Wittgensteinowi pocztą, co może wydawać się dziwne, zważywszy, że obaj wykładali po sąsiedzku i często się widywali.

W roku 1939 Turing rozpoczął w King's College kurs pt. *Podstawy matematyki*. W tym samym roku, tuż obok, w Trinity College, wykłady na taki sam temat wygłaszał Wittgenstein. Najwidoczniej Turing zainteresował się wykładami Wittgensteina i postanowił na nie uczęszczać. Wykłady odbywały się w prywatnych pomieszczeniach dwa razy w tygodniu od 5 do 7 po południu. Ponoć każdy ze słuchaczy musiał najpierw odbyć osobistą rozmowę z Wittgensteinem w jego surowym gabinecie w Whewell Court w Trinity College. Wedle wspomnień Normana Malcolma, Wittgenstein wykładał bez przygotowania i bez notatek. Powiedział Malcolmowi, że był w stanie wykladać w taki improwizowany sposób tylko dlatego, że poświęcił poruszonym problemom wiele namysłu i papieru. Niemal każdy z wykładów przeradzał

się w dialog ze studentami. Najczęściej z Turingiem, który wśród słuchaczy był jedynym zawodowym matematykiem i prezentował punkt widzenia, jaki w końcu musiał doprowadzić do ujawnienia się zasadniczych rozbieżności. Nastąpiło to w wykładzie XXI, a przede wszystkim XXII, dotyczącym problemu sprzeczności w matematyce.

1. W kwestii sprzeczności

Sprzeczność w matematyce wydaje się sprawą „być albo nie być”. Wszystkie ze stron sporu o podstawy matematyki, w którym w pewnym sensie brał także udział Wittgenstein: logicyzm, intuicjonizm oraz formalizm, zgodnie twierdziły, że jeśli w danym systemie matematycznym kryje się sprzeczność, to należy go odrzucić jako niespójny. Dla Hilberta niesprzeczność była nie tylko kryterium prawdziwości danego systemu, ale także kryterium samego istnienia obiektów matematycznych (por. Murawski 2001, s. 11). W wykładach Wittgensteina problem sprzeczności pojawił się po raz pierwszy w wykładzie XXI w kontekście pytania: „W jaki sposób przekonujemy się do jakiegoś prawa logicznego?” (*LFM*, s. 199). Moglibyśmy odpowiedzieć, że prawa logiczne potwierdza doświadczenie o bardzo pierwotnym charakterze, albo że potwierdza je dowód. Ale dowód od czegoś się zaczyna, to znaczy od aksjomatów, pierwotnych sądów, dla których nie ma już żadnego dowodu. Jako przykład prawa logicznego Wittgenstein podaje prawo sprzeczności i pyta, jakie doświadczenie przekonuje nas co do tego prawa. Przypuśćmy, że mówię do kogoś: „Wyjdź z pokoju i nie wychodź z pokoju” i ten ktoś nie wie, co ma robić. Jednakże takiego doświadczenia (i w ogóle żadnego innego) nie potraktowalibyśmy jako potwierdzenia prawa sprzeczności. To potwierdzenie opiera się bowiem na czymś innym:

Najpierw uczymy się pewnej techniki użycia słów. Następnie najbardziej naturalną rzeczą jest wykluczenie pewnych zdań, których nie używamy – jako zdań zawierających sprzeczności. To zaś idzie w parze z pewnymi innymi technikami (*LFM*, s. 201).

Te inne techniki, połączone z techniką uczenia się słów, to sposoby działania, z którymi język jest spleciony. Wittgenstein kontynuuje: „uczymy się pewnej praktyki, techniki języka, w następstwie czego wszyscy mamy skłonność do unikania tej formy, w oparciu o którą w żaden sposób naturalnie nie działamy, chyba że objaśni się nam tę konkretną formę na nowo” (*LFM*, s. 206). To osobliwe związanie języka z naszym działaniem sprawia, że sprzeczności wprowadzają nas w zakłopotanie, często sztuczne albo pozorne, jak w przypadku paradoksu kłamcy. Zdaniem Wittgensteina wydaje się dziwne, że ktoś mógłby się tym paradoksem przejmować, ale jeszcze dziwniejsze, że „jest to rzecz,

którą ludzie w ogóle się przejmują” (*LFM*, s. 206), to znaczy, że stanowi to jakiś ogólny problem filozoficzny. Najważniejsze, że sprzeczność nie występuje w naszym codziennym użyciu słowa „kłamię”. A jeśli istnieje też inny sposób jego zastosowania, z którego wynika, że „nie kłamię”, to uczestniczymy w bezużytecznej grze. Nie ma tu żadnej szkody, żadnego błędu nie popełniliśmy.

Turing zgadzał się z takim ujęciem sprzeczności, komentując słowa Wittgensteina następująco: „W zakłopotanie wprawia fakt, że zwykle używamy sprzeczności jako kryterium tego, że popełniliśmy jakiś błąd. W tym jednak przypadku nie można znaleźć błędu w naszym postępowaniu” (*LFM*, s. 207). Są jednak, wedle Turinga, sytuacje, w których wystąpienie sprzeczności może powodować szkody, na przykład w przypadku zastosowania, które grozi zawaleniem się mostu. Zdaniem Wittgensteina zawalenie się mostu nie jest jednak sprawą sprzeczności, ale zastosowania niewłaściwego prawa przyrody albo błędu w obliczeniach wynikającego z ukrytych sprzeczności w danym systemie (rachunku). Pierwszy przypadek nie ma nic wspólnego ze sprzecznością, drugi wymaga wyjaśnienia. Sam fakt wystąpienia sprzeczności niekoniecznie musi wpędzać nas w kłopoty. Co zrobimy ze sprzecznością, zależy bowiem od tego, jakie ma ona dla nas znaczenie. W samej logice sprawa wygląda nieco inaczej. Można bowiem wyobrazić sobie inną logikę niż nasza, taką, w której sprzeczność $p \wedge \sim p$ przestaje być sprzecznością. Załóżmy, że mamy rachunek, gdzie „ p ” oznacza zdanie, „ $\wedge$ ” koniunkcję, a „ $\sim$ ” negację, analogicznie jak w naszej logice. Gdybyśmy pozwolili na obecność sprzeczności $p \wedge \sim p$, wówczas symbolom tym musielibyśmy przypisać inne reguły użycia, według których to, co wygląda na iloczyn logiczny, w rzeczywistości nim nie jest. W tym nowym rachunku $p \wedge \sim p$ mogłoby zastępować „Jan i nie-Jan”, na przykład „Jan i nie-Jan jest w tym pokoju”, w znaczeniu „Jan i jakieś inne osoby są w tym pokoju”. Można by oponować, że „Jan” nie jest zdaniem. Tak, ale może być użyte jako zdanie, na przykład „Janie!” w sensie „Janie, przyjdź tutaj!” albo „Jan!” – „Jan jest tutaj”. Wittgenstein zaznacza, że nic nie stoi na przeszkodzie, byśmy zaakceptowali taką logikę tolerującą sprzeczności, z tym że nie bylibyśmy już skłonni nazywać ją logiką, tak jak innego mnożenia nie nazwalibyśmy w ogóle mnożeniem.

Turing podkreślał jednak aspekt zastosowania, w którym obawiamy się sprzeczności, ponieważ rzeczy praktyczne mogą się nie powieść, jeśli tych sprzeczności nie dostrzeżemy. Zdaniem Wittgensteina łatwo zrozumieć, dlaczego ludzie obawiają się czy też powinni obawiać się sprzeczności w przypadku rozkazów, opisów itd., czyli *poza* matematyką, ale dlaczego mieliby się obawiać sprzeczności *wewnątrz* matematyki? Odpowiedź Turinga wydaje się jasna: ponieważ w zastosowaniach coś może się nie powieść, na przykład most może się zawalić. Wittgenstein: „Ale przecież nic nie musi potoczyć się źle. A jeżeli rzeczywiście wydarzy się coś złego – jeśli most się zawali – wtedy

twój błąd wynikał raczej z zastosowania niewłaściwego prawa przyrody” (*LFM*, s. 217).

Podsumowując: Wittgenstein raczej bagatelizował cały problem sprzeczności w logice i matematyce, stojąc na stanowisku, że nie należy przejmować się ukrytymi sprzecznościami, dopóki one nie wystąpią. A jeśli wystąpią, to jest to raczej kwestią naszego błędu, a ściślej mówiąc, zastosowania złego prawa fizyki. Z taką postawą Turing jako matematyk nie chciał się zgodzić. Dla niego, jak dla każdego matematyka, niesprzeczność systemu była gwarantem jego prawdziwości. Być może dlatego po dwóch kolejnych wykładach Turing przestał na nie przychodzić, czuł, że między nim a filozofem istnieje zbyt duża różnica poglądów, by dyskusja mogła przynieść jakieś owocne rezultaty.

2. Metoda przekątniowa

Problem sprzeczności poruszał Wittgenstein sporadycznie w *Uwagach o podstawach matematyki*, na przykład w części IV, obejmującej notatki z lat 1942–1944, a zwłaszcza w części VII (1941–1944). Nigdzie jednak w *UPM* nie pojawia się nazwisko Turinga. Dopiero w notatkach z lat 1946–1947, składających się na pierwszy tom *Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie*, Wittgenstein w jednej z uwag wymienia Turinga, ale tym razem w związku z jego artykułem *On Computable Numbers*, który ongiś otrzymał pocztą od autora:

„Maszyny” Turinga. Te maszyny to są w istocie *ludzie*, którzy liczą. To, co mówi nam Turing, można też wyrazić odwołując się do *gier*. Na przykład interesującymi grami byłyby te, w których dochodzi się zgodnie z określonymi regułami do pewnych niedorzecznych poleceń. Mam na myśli gry podobne do „gry wyścigowej”. Można, dajmy na to, otrzymać polecenie „kontynuuj w ten sam sposób”, kiedy to nie ma sensu, ponieważ, powiedzmy, wpadło się w koło; to polecenie ma sens tylko w pewnych określonych pozycjach (*BPP*, t. I, § 1096).

W następnej uwadze (*BPP*, t. I, § 1097)¹ Wittgenstein rozwija nawiązanie do Turinga:

Wariant dowodu przekątniowego Cantora: Niech $N = F(k, n)$ będzie formą zasad rozwijania ułamków dziesiętnych. N jest n -tym miejscem dziesiętnym k -tego rozwinięcia. Zasada dla przekątnej będzie wówczas brzmiała: $N = F(n, n) = \text{Def. } F'(n)$.

Należy udowodnić, że $F'(n)$ nie może być jedną z reguł $F(k, n)$. Załóżmy, że jest setną z nich. Wówczas reguła tworzenia $F'(1)$ brzmi $F(1, 1)$,

$F'(2) - F(2, 2)$ etc.,

zaś regułą tworzenia setnego miejsca $F'(n)$ będzie $F(100, 100)$; tzn. mówi nam ona tylko, że setne miejsce ma być równe samemu sobie, nie jest więc *żadną* regułą dla $n = 100$.

¹ Uwaga ta została włączona do *Kartek*. Cytuję według przekładu polskiego.

Reguła gry brzmi: „Czyń to samo, co...!”, – a w tym szczególnym przypadku: „Czyń to samo, co to, co czynisz!” (K, § 694).

Zacznijmy nasz komentarz od drugiej z przytoczonych uwag. Wittgenstein wprost nawiązuje w niej do dowodu przekątniowego Cantora, który został wykorzystany przez Turinga w *On Computable Numbers*, by udowodnić istnienie liczby nieobliczalnej (por. Hodges 2014, s. 151–157). Jak wiadomo, Cantor za pomocą swego rozumowania mógł wykazać istnienie liczb niewymiernych w dość pomysłowy sposób. Należało w tym celu sporządzić listę liczb wymiernych w postaci nieskończonych ułamków dziesiętnych między 0 a 1:

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{5}$...

1. 0,50000000000000...
2. 0,33333333333333...
3. 0,25000000000000...
4. 0,66666666666666...
5. 0,20000000000000...
6. 0,16666666666666...
7. 0,40000000000000...
8. 0,75000000000000...
9. 0,1428571428571...
10. 0,60000000000000...
11.
12.
- ...

Pomysł Cantora polegał na skonstruowaniu liczby przekątniowej, złożonej z cyfr występującej na przekątnej listy rozwinięć dziesiętnych, zaczynającej się od ciągu:

0,5306060020...,

a następnie zmianie każdej z nich przez zwiększenie o 1, a w przypadku cyfry 9 zastąpienie jej przez 0. W ten sposób otrzymamy tzw. liczbę przekątniową:

0,6417171131...

Liczba ta nie może wystąpić na liście liczb wymiernych, a zatem nie może być wymierna, ponieważ od pierwszej liczby wymiernej różni się na pierwszym miejscu po przecinku, od drugiej na drugim, od trzeciej na trzecim miejscu, od siedemset sześćdziesiątej czwartej na siedemset sześćdziesiątym czwartym miejscu po przecinku, itd. Cantor posłużył się tą metodą, by wykazać nieprze-

liczalność liczb rzeczywistych. Dla każdej dowolnej listy liczb rzeczywistych można utworzyć nieskończony ułamek dziesiętny nieznajdujący się na tej liście, co dowodzi w ścisłym sensie, że liczb rzeczywistych jest więcej niż wymiernych, całkowitych i naturalnych, których zbiory są przeliczalne.

Dla Turinga rozumowanie przekątniowe Cantora było szczególnie obiecujące, ponieważ pokazywało, jak z liczb wymiernych otrzymać liczbę niewymierną. W dokładnie taki sam sposób można było bowiem z liczb obliczalnych otrzymać liczbę nieobliczalną. Oczywiście do jej uzyskania była jeszcze bardzo daleka droga. Konstrukcja liczby przekątniowej była jasno zdefiniowana, dlatego więc miała być nieobliczalna? Mistrzowskie dokonanie Turinga polegało zatem na pokazaniu, że pomimo jasno i precyzyjnie określonej metody generowania kolejnej cyfry w ciągu przekątniowym ciąg ten jest nieobliczalny.

Wittgenstein bardzo dobrze uchwycił w krótkich uwagach istotę wyniku Turinga i całkowicie go akceptował. Zanim jednak o tym powiemy, przypomnijmy, że wcześniej, czyli w II części *Uwag o podstawach matematyki*, autor *Traktatu* poddał surowej ocenie cały projekt teorii mnogości Cantora. Pisał m.in. „Wierzę i mam nadzieję, że przyszłe pokolenia będą się śmiać z tego hokus-pokus” (*UPM*, cz. II, § 22) albo „Wyobraź sobie, że teorię mnogości wynalazł satyryk jako rodzaj parodii matematyki. – Później jednak dostrzeżono w niej pewien sens i włączono ją do matematyki. (Skoro bowiem ktoś może ją uważać za raj matematyków, dlaczego ktoś inny nie miałby jej uważać za żart?)” (*UPM*, cz. V, § 7). W ostatniej wypowiedzi o teorii mnogości z *Uwag* uznał ją w końcu za coś, co „przypomina nowotwór, bez celu i sensu wyrastający z normalnego ciała” (*UPM*, cz. VII, § 11).

Centralnym punktem tej bardzo negatywnej oceny była krytyka metody przekątniowej Cantora, za sprawą której dowodził on, że liczb rzeczywistych jest *więcej*² niż liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych. Wittgenstein podawał w wątpliwość, czy ogólnie akceptowany rezultat metody przekątniowej jest jej adekwatną interpretacją. Krytykuje on nie tyle samą metodę, ile użytek, który zrobił z niej Cantor, czyli uznanie jej za dowód nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych. Zdaniem Wittgensteina metoda przekątniowa powinna ograniczać się do pokazania, że pojęcie „liczby rzeczywistej” różni się od pojęcia liczby naturalnej bardziej, niż powszechnie się przyjmuje. Ale Cantor poszedł znacznie dalej i użył tej metody do porównania pod względem ekstensji zbioru liczb rzeczywistych ze zbiorem liczb naturalnych. „Wierzę i mam nadzieję, że przyszłe pokolenia będą śmiać się z tego hokus-pokus” (*UPM*, cz. II, § 22)³. „Hokus-pokus” nazywa tutaj Wittgenstein dowód przekątniowy, że nie-

² Oczywiście słowo „więcej” należy tu rozumieć w sensie pojęcia mocy zbioru.

³ Warto może wspomnieć, że w pierwszym dwujęzycznym wydaniu *Uwag o podstawach matematyki* zdanie o „hokus-pokus” zostało usunięte, jakby wydawcy wstydziło się słów Wittgensteina (a może uznali je za zbyt obrazoburcze?) (zob. Wittgenstein 1956, s. 57–57e).

skończony zbiór $\mathbb{R}$ ma większą ekstensję niż pozostałe zbiory nieskończone. Jest to kluczowy moment w jego krytyce Cantora, którego dowód nazywa „dowodem chępliwym”, czyli takim, który pokazuje więcej, niż pozwalają na to stosowane w nim środki (por. *UPM*, cz. II, § 21). Wittgenstein widział w dowodzie przekątniowym raczej metodę czy też regułę dla sukcesywnego konstruowania liczb, które są różne od każdej kolejnej liczby w danym systemie czy ciągu (por. Floyd, Mühlhölzer 2020, s. 140–141). Jego zdaniem prawdziwym celem metody przekątniowej był dowód niemożliwości ułożenia w ciąg liczb rzeczywistych. Jednakże pojęcie ciągu nieskończonego zostało wyabstrahowane z ciągu liczb naturalnych i innych podobnych ciągów, co jest niewystarczające, by nadać jasny sens pytaniu, czy zbiór liczb rzeczywistych można uporządkować w ciąg. Co najwyżej moglibyśmy stwierdzić, że dysponujemy przykładami porządkowania liczb naturalnych, wymiernych czy algebraicznych i że są to pewne analogiczne wytwory nazywane ciągami, ale od tych przypadków nie ma żadnego przejścia do przypadku „wszystkich liczb rzeczywistych”. Nie istnieje po prostu ogólna metoda pozwalająca na ustalenie, czy dany zbiór da się ustawić w ciąg. Według autora *Traktatu* brakuje nam wyraźnej różnicy między sposobem używania terminów „pierwiastek”, „liczba algebraiczna” itp. a pojęciem „liczby rzeczywistej”. Jego zdaniem nie ma także sensu mówienie o ciągu wszystkich liczb rzeczywistych, skoro metoda Cantora także liczbę przekątniową tego ciągu określa jako „liczbę rzeczywistą” (por. *UPM*, cz. II, § 16).

Z ustaleń tych wynika, że Wittgenstein odrzucał dowód przekątniowy w formie, jaką nadał mu Cantor, to znaczy jako dowód, że nieskończony zbiór liczb rzeczywistych ma większą ekstensję niż pozostałe zbiory nieskończone, ale akceptował wersję Turinga⁴. Przyjrzyjmy się zatem bliżej enigmatycznej uwadze 1097 z *BPP* i spróbujmy ją zinterpretować. Otóż zdaniem Wittgensteina wariant

⁴ Zdaniem Juliet Floyd, w uwadze 1097 z *Bemerkungen* Wittgenstein przedstawił własny wariant dowodu przekątniowego Cantora (por. Floyd 2012, s. 35–39). Autorka ta uważa też, że Wittgenstein odegrał kluczową rolę w kształtowaniu się poglądów Turinga zawartych w *On Computable Numbers*. Przemawiają za tym następujące argumenty. W roku 1933 Turing zapoznał się z pracą Bertranda Russella *Wstęp do filozofii matematyki* (1919), w której, w ostatnim rozdziale „Matematyka i logika”, wspomniane jest w przypisie nazwisko Wittgensteina w związku z problemem tautologii: „Na znaczenie «tautologii» dla definicji matematyki zwrócił mi uwagę mój dawny uczeń Ludwig Wittgenstein, który pracował nad tym zagadnieniem. Nie wiem, czy rozwiązał ten problem, a nawet czy żyje” (Russell 2003, s. 261). Floyd twierdzi w związku z tym, że „Turing adoptuje Wittgensteina pojęcie tautologii, centralne dla filozofii logiki w Cambridge od czasu *Traktatu*” (Floyd 2017, s. 114). Chodzi o to, że Wittgenstein opisuje w *TLP* (4.461) tautologie jako zdania, które „nic nie mówią” i „są bezsensowne”. Tautologia – etymologicznie „mówienie tego samego” – jest prawdziwa niezależnie od tego, jaki jest świat. Taki opis tautologii miał być aluzją do tzw. „maszyny H” Turinga, której zadaniem było obliczanie ciągu przekątniowego w oparciu o zasadę „Do-What-You-Do”. Argumentacja Floyd wspiera się jednak na zbyt kruchych fundamentach, czyli na jednym przypisie z książki Russella i na niepotwierdzonym przypuszczeniu, że Turing znał *TLP* przed 1936 rokiem. Szczegółową krytykę stanowiska Floyd przedstawił Adam Harwood (2020, s. 437–451).

dowodu przekątniowego Cantora w wydaniu Turinga wygląda następująco: niech regułą generowania listy ułamków dziesiętnych będzie $N = F(k, n)$; graficznie można by ją przedstawić tak (por. Harwood 2020, s. 40–41):

	n_1	n_2	n_3	n_4	...
k_1	~~4~~	6	2	1	
k_2	7	~~2~~	3	9	
k_3	8	8	~~5~~	2	
k_4	5	2	1	~~8~~	
...					

Na przykład $F(k_3, n_2) \rightarrow N = 8$. Liczbę przekątniową Wittgenstein definiuje jako $N = F(n, n) = \text{Def. } F'(n)$. Czyli, że należy wziąć n -tą liczbę z k -tego rzędu, gdzie $k = n$. Trzeba teraz udowodnić, że $F'(n)$ nie może być jedną z reguł $F(k, n)$, czyli że liczba przekątniowa nie może wystąpić jako jedno z rozwinięć k . Wittgenstein chce to pokazać poniekąd na wzór dowodu nie wprost i przyjmuje, że liczba przekątniowa jest setnym rozwinięciem k , czyli $F(100, n) = F'(n)$, czyli że $F'(n)$ jest jedną z reguł $F(k, n)$. Ale reguła dla $F(100, n)$ mówi: wygeneruj n -tą liczbę na każdym n -tym miejscu $F'(n)$. Dla $n = 100$ reguła ta nic nie mówi oprócz tego, że setne miejsce jest równe samo sobie. Nie ma liczby n_{100} , gdyż jest ona wyznaczana przez inną regułę niż liczba przekątniowa. A więc zakłada się coś, co jest jeszcze niezdefiniowane. Wittgenstein wskazuje tu na rodzaj koła: żeby zdefiniować $F'(n)$, muszę najpierw zdefiniować $F(k, n)$, ale przy założeniu $F(100, n) = F'(n)$, $F(k, n)$ chcę zdefiniować przez $F'(n)$. Reguła rozwijania ciągu przekątniowego jest po prostu inna niż reguła rozwijania ułamków dziesiętnych.

Taką interpretację sugeruje też pierwsza z przytoczonych uwag z *Bemerkungen*, w której Wittgenstein oddaje Turinga aplikację dowodu przekątniowego, odwołując się do pojęcia *gry*. Pewne reguły mogą być dobrze zdefiniowane: „kontynuuj w ten sam sposób”, ale mają sens, są wykonalne, tylko w określonych pozycjach. Jedna z kluczowych idei w *On Computable Numbers* głosiła, że definiowalność nie jest identyczna z obliczalnością ani jej nie implikuje. Nawet jeśli jesteśmy w stanie zdefiniować instrukcje obliczania każdej kolejnej liczby w ciągu przekątniowym, to nie jest ona obliczalna. Wersja Turinga metody Cantora pokazywała, że reguła obliczania ciągu przekątniowego nie może być regułą obliczania rozwinięcia dziesiętnego w danym systemie. Ujęcie tej metody jako pewnej reguły było w istocie ujęciem intensjonalnym, które czyniło zadość dążeniom Wittgensteina w *UPM*, by tak właśnie rozumieć procedurę przekątniową, jakkolwiek jego uwagi w tym względzie nie były wówczas wystarczająco jasne⁵.

⁵ Tak też sprawę widzi Harwood (2020, s. 42).

Jak pisaliśmy wyżej, Wittgenstein w cz. II *UPM* bardzo krytycznie odniósł się do dowodu Cantora, nazywając go „hokus-pokus”. Ściślej mówiąc, słowem tym określił użytek, jaki Cantor zrobił z tego dowodu, który miał pokazywać pewien matematyczny fakt, że zbiór liczb rzeczywistych jest *większy* od zbioru liczb naturalnych. Nie-ekstensjonalistyczne podejście Wittgensteina zakazywało mówienia o większej bądź mniejszej nieskończoności. Metoda przekątniowa, jeśli miała mieć jakikolwiek sens, to właśnie nie-ekstensjonalny. Choć w *UPM* nie napisał tego nigdzie wprost, to z kontekstu rozważań wynika, że rozumiał ją jako pewną nową regułę mówienia o nieprzeliczalności, która wskazuje na to, że pojęcie „liczby rzeczywistej” różni się od pojęcia liczby naturalnej bardziej, niż zwykliśmy sądzić. Wittgenstein nie widział jednak jasno możliwości pozamatematycznych aplikacji metody Cantora, a właśnie taka pozamatematyczna stosowalność matematyki, stosowalność „w cywilu”, jak się wyraził (*UPM*, cz. V, § 2), jest sprawą fundamentalną. Co więcej, to właśnie pozamatematyczne użycie znaków nadaje im znaczenie. Istotą filozofii matematyki Wittgensteina był bowiem pogląd, obecny już w *Traktacie*, że zdania matematyczne nie są opisem abstrakcyjnych bytów matematycznych (G. Frege), ani opisem rzeczywistości empirycznej (B. Russell, F. Ramsey), ani nie opisują działań umysłu. Zdania matematyczne to reguły reprezentacji, mają sens preskryptywny (*resp.* normatywny), czyli są wzorcami przekształcania zdań empirycznych. Na przykład zdanie „ $5 > 4$ ” pozwala na stwierdzenie, że „w kwintecie gra więcej muzyków niż w kwartecie” i wyklucza zdanie: „Kwartet to większy zespół niż kwintet”. Wittgenstein był przekonany, że teoria mnogości tworzy pojęcia, ale nie ma jasności co do ich pozamatematycznego zastosowania. „Nie istnieje technika *gramatyczna* [zmiana tłumaczenia moja – P.D.⁶], która podsuwałaby nam sposób użycia takiego wyrażenia [jak np. $\aleph_0 < c$ – P.D.]” (*UPM*, cz. II, § 38). W przeciwieństwie do „ $5 > 4$ ” zdanie, „ $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ ” nie jest żadną regułą normatywną, to znaczy nie ma pozamatematycznego zastosowania i w tym sensie nie wiemy, co z tym zdaniem począć. Należy podkreślić, że to pozamatematyczne zastosowanie Wittgenstein rozumiał bardzo szeroko, jako zastosowanie w naukach empirycznych, ale także w życiu codziennym.

Nie można wykluczyć, że lektura artykułu *On Computable Numbers* i dyskusje z jego autorem oraz Alisterem Watsonem, którego nazwisko pojawia się w uwadze 1097 *BPP*, pozwoliły Wittgensteinowi dostrzec w zastosowaniu uniwersalnej Maszyny Turinga taką pozamatematyczną możliwość aplikacji. W każdym razie na pewno pozwoliły mu wykryć intensjonalny sens dowodu przekątniowego. Krótko mówiąc, Wittgenstein odrzuca ekstensjonal-

⁶ W polskim wydaniu *Uwag o podstawach matematyki* zamiast „technika gramatyczna” (*grammatische Technik*) jest błędnie „technika matematyczna”. Technika matematyczna użycia wyrażen teorii mnogościowych oczywiście istnieje.

ny sens procedury przekątniowej, który nadał jej Cantor, ale akceptował intencjonalne jej wykorzystanie przez Turinga. Akceptował tym samym ogólny rezultat *On Computable Numbers*, który był *coup de grâce* dla programu Hilberta.

3. Czy maszyna może myśleć?

„«Maszyny» Turinga. Te maszyny to są w istocie *ludzie*, którzy liczą” (*BPP*, t. I, § 1096). Słowa Wittgensteina możemy potraktować jako nawiązanie do artykułu Turinga:

Możemy porównać człowieka podczas czynności obliczania liczby rzeczywistej do maszyny zdolnej tylko do skończonej liczby stanów $q_1, q_2, \dots, q_R$; które będą nazywane „ m -konfiguracjami”. Maszyna jest wyposażona w „taśmę” (odpowiednik papieru) biegnącą przez nią i podzieloną na sekcje (zwane „kwadratami”), z których każda może zawierać „symbol”. W danym momencie pojawia się tylko jeden kwadrat, powiedzmy r -ty, noszący symbol $G(r)$, który jest „w maszynie”. Kwadrat ten możemy nazwać „kwadratem skanowanym”. Symbol na zeskanowanym kwadracie można nazwać „zeskanowanym symbolem”. „Zeskanowany symbol” jest jedynym symbolem, którego maszyna jest, że tak powiem, „bezpośrednio świadoma” (Turing 1936, s. 231).

Porównując liczenie człowieka do działania maszyny, Turing uczynił z liczenia proces mechaniczny. Mógł tym samym przeprowadzić użyteczną, z jego punktu widzenia, paralelę między aktywnością ludzką a działaniem mechanizmu, stosując do opisu tego ostatniego pojęcia psychologiczne:

Zachowanie człowieka, który liczy, w każdym momencie zdeterminowane jest przez symbole, które obserwuje, oraz jego „stan umysłu” w tym momencie [...]. Wyobraźmy sobie, że operacje wykonywane przez liczącego człowieka są podzielone na „operacje proste”, tak elementarne, że nie jest łatwo wyobrazić sobie ich dalszy podział. Każda taka operacja polega na zmianie systemu fizycznego składającego się z liczącego i jego taśmy. Znamy stan systemu, jeśli znamy sekwencję symboli na taśmie, które liczący obserwuje, [...] i jego stan umysłu [...].

Proste operacje muszą zatem obejmować:

- (a) zmiany symbolu na jednym z obserwowanych kwadratów;
- (b) zmiany jednego z obserwowanych kwadratów na inny kwadrat w obrębie L kwadratów z jednego z wcześniej obserwowanych kwadratów. [...]

Faktycznie wykonana operacja jest określana [...] przez stan umysłu liczącego i obserwowane symbole. W szczególności określają one stan umysłu kogoś, kto liczy, po wykonaniu operacji. Możemy teraz skonstruować maszynę wykonującą pracę tego człowieka. Każdemu z jego stanów umysłu odpowiada „ m -konfiguracja” maszyny (Turing 1936, § 9, s. 250–251).

Wittgenstein bardzo dobrze rozpoznał intencje Turinga, ale całkiem celowo, jak się zdaje, odwrócił relację „maszyna – człowiek”: „Te maszyny to ludzie, którzy liczą”. Sformułowanie to brzmi nieco dwuznacznie; uświadamia nam, że z jednej strony Turing chciał wyjaśnić działanie maszyny w analogii

do działania człowieka, „ludzkiej maszyny liczącej”, jak zwykł mawiać (por. Turing 1972, s. 5), ale z drugiej strony uznanie liczenia za proces mechaniczny było konsekwencją spojrzenia na tę ludzką czynność z punktu widzenia maszyny. Mielibyśmy zatem do czynienia ze swoistą dialektyką – Turing opisuje ludzkie liczenie, porównując je do działania maszyny, ale jednocześnie działanie maszyny tłumaczy, stosując mentalne predykaty; jego maszyny to ludzie, którzy liczą.

W 1950 roku Turing opublikował w czasopiśmie „Mind” artykuł pt. *Computing Machinery and Intelligence*⁷, w którym poszukiwał odpowiedzi na pytanie, czy maszyny mogą myśleć. Przede wszystkim pytanie to należy, jego zdaniem, przeformułować i wyrazić za pomocą terminów, które nie są tak niejednoznaczne jak „myślenie” i „maszyna”. Stworzenie dla tych pojęć powszechnie akceptowalnych definicji jest w zasadzie niemożliwe. Nową postać problemu opisuje za pomocą tzw. „gry w naśladownictwo”. Udział w niej biorą trzy osoby: mężczyzna *A*, kobieta *B* i człowiek zadający pytania *C*. Zadaniem *C*, który oczywiście nie widzi i nie słyszy *A* i *B*, jest odgadnięcie, który z dwóch pozostałych uczestników gry jest mężczyzną, a który kobietą, zadając im pytania, np. „Jak długie masz włosy?”. Celem *A* w grze jest sprawienie, aby *C* źle go zidentyfikował, celem *B* udzielenie mu pomocy, to znaczy mówienie prawdy. Co się stanie – pyta Turing – gdy maszyna zastąpi w grze uczestnika *A*? Czy pytający będzie decydował błędnie tak samo często jak wtedy, kiedy w grze biorą udział ludzie? Pytania te z powodzeniem zastępują, jego zdaniem, początkowe pytanie, czy maszyny mogą myśleć. Gdyby komputer odpowiadający na pytania okazał się nieodróżnialny od człowieka, to należałoby odpowiedzieć pozytywnie na naszą podstawową kwestię⁸. Podsumowując swoją propozycję testu na myślenie maszyny w postaci „gry w naśladownictwo”, Turing skonstatował:

Wierzę, że za około pięćdziesiąt lat stanie się możliwe programowanie maszyn cyfrowych o pojemności pamięci rzędu 10^9 tak, aby grały w grę w naśladownictwo tak dobrze, że przeciętny pytający po pięciu minutach zadawania pytań nie będzie miał więcej niż 70 procent szansy dokonania prawidłowej identyfikacji. Jestem przekonany, że pierwotne pytanie: „Czy maszyny mogą myśleć?” oznacza zbyt mało, aby zasługiwało na dyskusję. Niemniej wierzę, że pod koniec tego stulecia używanie słów i ogólna opinia ludzi wykształconych zmieni się tak bardzo, że można będzie mówić o maszynach myślących, nie spodziewając się sprzeciwu (Turing 1972, s. 8).

Wittgenstein nie znał artykułu z „Mind”, ale ogólny sens poglądów Turinga na temat myślących maszyn był już *implicite* obecny w *On Computable Numbers*, co widać wyraźnie w przytoczonym powyżej z § 9 tamtej pracy dłuższym fragmencie o liczącym człowieku. Za bezpośrednią odpowiedź na argumenta-

⁷ Przekład polski: Turing 1972.

⁸ O ile mi wiadomo, żadna maszyna (komputer) nie zdała, jak dotąd, testu Turinga.

cję Turinga można uznać część V *UPM*, w której Wittgenstein stawia pytanie: „Czy maszyna licząca *liczy*?” (por. Shanker 1987, s. 619; Shanker 1998, s. 6; Hacker 1990, s. 166). Czy tak było w rzeczywistości, to znaczy, czy inspiracją był tu artykuł Turinga z 1936 roku, tego nie wiemy na pewno, jego nazwisko nigdzie bowiem w tekście nie pada. Autor *Dociekań* bardzo często konfrontował się z problemem, czy maszyna myśli, kiedy chciał opisać użycie słowa „myśleć”, „myślenie”, „rozumienie” oraz wyrażen pokrewnych. Co więcej, za niemal powszechną uznawał tendencję w myśleniu o myśleniu, jakby to był proces dokonujący się wewnątrz jakiejś zamkniętej przestrzeni: „myślenie dokonuje się w głowie”, „myślenie jest procesem, czynnością”. W *The Big Typescript* (1933) pisał na przykład: „Jeśli pytamy, «gdzie dokonuje się myślenie», to za tym kryje się zawsze wyobrażenie pewnego procesu mechanicznego, który zachodzi w zamkniętej przestrzeni, bardzo podobnie jak proces w maszynie liczącej” (*BT*, 154). W *Niebieskim zeszycie* pytał zaś wprost:

„Czy maszyna może myśleć?” (niezależnie od tego, czy działanie tej maszyny można opisać i przewidzieć za pomocą praw fizyki czy też być może za pomocą praw jakiegoś innego rodzaju, które odnoszą się do zachowań organizmów). Trudność, której wyrazem jest to pytanie, nie polega tak naprawdę na tym, że nie znamy jeszcze maszyny, która potrafiłaby to robić. To pytanie nie jest wcale analogiczne do pytania, które ktoś mógł zadać sto lat temu: „Czy maszyna może skroplić gaz?”. Kłopot polega raczej na tym, że zdanie: „Maszyna myśli (postrzega, chce)” z jakiegoś powodu wydaje nam się pozbawione sensu. To tak, jakbyśmy zapytali: „Czy liczba 3 ma jakiś kolor?” („Jaki mógłby to być kolor, skoro z pewnością nie jest to żaden z tych, które znamy?”) (*NB*, s. 85–86).

Wittgenstein zwraca uwagę w tym fragmencie na różnicę kategoryalną między pojęciami „maszyna” i „myślenie”, której często nie zauważamy. Podobnie jak nie stosujemy pojęcia koloru do liczb, tak że pytanie o ich kolor jest jawnie bezsensowne, tak też pozbawione sensu wydaje się pytanie, czy maszyna myśli, ponieważ nie przypisujemy myślenia rzeczom martwym. Pod względem logicznym oba pytania są równie bezsensowne, jakkolwiek mogą się różnić pod względem psychologicznym, to znaczy pytanie: „Czy maszyna myśli?” może wydawać się nam całkiem sensowne, ponieważ współczesne maszyny (komputery) wykonują wiele bardzo skomplikowanych operacji i zastępują nas w wielu czynnościach (nie ma potrzeby przytaczania tu przykładów). Ale za autorem *Dociekań* moglibyśmy powiedzieć, że ta fascynacja sztuczną inteligencją często przysłania nam prosty, aczkolwiek fundamentalny, fakt, że „tylko o żywym człowieku – oraz o czymś, co jest do niego podobne (podobnie się zachowuje) – można rzec, iż ma doznania; że widzi; że jest ślepe; że słyszy; że jest głuche; że jest przytomne lub nieprzytomne” (*DF*, § 281). Słowa te nie są empirycznym uogólnieniem ani nie mają mocy metafizycznej konieczności. Są one raczej gramatyczną zasadą, która wyklucza przypisanie własności psychicznych do samego tylko ciała bądź jego części, albo do przedmiotów nieożywionych. Mówimy: „widziałem dobry film”, a nie: „mój mózg widział

dobry film”, „czytałem ciekawą książkę”, a nie: „mój mózg czytał ciekawą książkę”, „stałem się o niej”, a nie: „mój mózg stał się o niej” itd. To *ja* czegoś chcę, coś postrzegam, słyszę, czuję, wyciągam wnioski, analizuję; to *mnie* boli ręka, a nie rękę, i wtedy to *mnie* ktoś pociesza, patrząc mi w oczy, a nie rękę, patrząc na rękę. Taki jest nasz potoczny sposób mówienia, co nie znaczy, że w języku metaforycznym bądź figuratywnym nie jest możliwe inne użycie, kiedy zdolności typowo ludzkie przypisujemy rzeczom, zwłaszcza komputerom, które potrafią „mówić”, „odpowiadać na pytania”, „analizować”, „tłumaczyć”, „interpretować”, „grać w szachy”, „komponować muzykę”, „pisać wypracowania”. Ale jest to użycie drugorzędne, którego sens wyjaśniany jest przez odniesienie do użycia pierwotnego, odnoszącego się do człowieka⁹.

Założmy jednak, że komputer myśli. Jeśli tak, jeśli jest istotą myślącą, a raczej rzeczą myślącą, *res cogitans*, to także on może się nad czymś zastanawiać, coś rozważać, mieć myśli, zanim je wyrazi. Może być zatopiony albo pogrążony w myślach, mieć jakieś wyobrażenia, marzyć o czymś, dręczyć się myślami, mieć złe albo dobre myśli. Bo czy logiczna byłaby konstatacja, że istota, która może myśleć, nie może czegoś rozważać, nad czymś się zastanawiać, nie może mieć myśli, zanim je wyrazi? Albo zapytajmy: czy istnieje istota, która może myśleć, ale nie może być pogrążona w myślach, dręczyć się myślami, mieć dobre albo złe myśli? Czy może istnieć istota, która jest w stanie myśleć, ale nie jest w stanie marzyć, nie może mieć nadziei; która może myśleć, ale nie może czegoś się spodziewać? I najtrudniejsze chyba pytanie: czy może istnieć istota, która myśli, ale która nie wie o tym, że myśli? Wszystkie te zdolności osadzone są w ogromnej sieci innych zdolności i dyspozycji (por. Hacker 1990, s. 168). Przede wszystkim takie zdolności i dyspozycje manifestują się w zachowaniu, znajdują swój wyraz w języku i działaniu, są ekspresją pewnego sposobu życia (*Lebensform*).

Zdolności intelektualnych nie można również oddzielać od emocji, które z kolei związane są z percepcją i doznaniem takimi jak na przykład ból czy przyjemność. Ten, kto potrafi myśleć, potrafi także cieszyć się albo smucić myślami, bać się ich albo niepokoić się nimi. Potrafi polegać na otrzymanych informacjach, być zaskoczonym bądź pewnym co do rezultatów swojego rozumowania. Może wyznaczać sobie cele działania, osiągać je albo nie, nagle porzucać i podejmować na nowo, cieszyć się z sukcesów ich osiągnięcia bądź być przygnębionym, kiedy poniosło się porażkę. Mało rozsądne i całkiem nielogiczne byłoby przypuszczenie, że może istnieć istota, która myśli, ale która nie ma do swoich myśli żadnego emocjonalnego stosunku. A więc istota,

⁹ Wittgenstein: „Owszem; mawiamy o rzeczach martwych, że czują ból: np. podczas zabawy lalkami. Takie użycie pojęcia bólu jest jednak wtórne. Bo wyobraźmy sobie tylko, że ludzie mówiliby *tylko* o rzeczach martwych, że czują ból; że współczuliby *tylko* lalkom!” (DF, § 282).

która może myśleć, lecz nie może cieszyć się myślami, niepokoić się nimi, być z ich powodu wesoła albo smutna, nie przejmować się nimi albo przejmować, porzucać je szybko albo ciągle do nich wracać. Albo po prostu być obojętna!

4. Czy maszyna licząca liczy?

Skoro więc maszyna nie może myśleć, przynajmniej w tym sensie, w jakim słowa „myśleć” używamy na co dzień, to być może chociaż potrafi liczyć? Wittgenstein podniósł tę kwestię *explicite* w cz. V *UPM*, którą wraz z cz. VI możemy, jak wspominałem wyżej, potraktować jako bezpośrednią odpowiedź na argumentację Turinga z § 9 *On Computable Numbers*:

Czy maszyna licząca liczy?

Wyobraź sobie, że maszyna licząca powstałaby przez przypadek; teraz ktoś przez przypadek naciska jej guziki (albo przebiega po niej jakieś zwierzę), a maszyna oblicza iloczyn 25×20 .

Chcę powiedzieć: dla matematyki istotne jest to, że jej znaków używa się również w *cywilu*. To użycie znaków poza obrębem matematyki, a więc ich *znaczenie*, czyni z gry w znaki matematykę.

Podobnie jak nie jest to wnioskowanie logiczne, gdy jakiś układ przekształcam w inny (np. jeden sposób ustawienia krzeseł w inny), gdy poza tym przekształceniem układy te nie mają jakiegos użycia językowego (*UPM*, cz. V, § 2).

Jak wspominałem, dla Wittgensteina zdania matematyki miały sens normatywny, to znaczy były regułami użycia wyrażeń poza matematyką, zarówno w języku codziennym, jak i w naukach empirycznych. W tej perspektywie liczenie okazywało się zatem pewną, by tak rzec, normatywną praktyką, na przykład iloczyn $25 \times 20 = 500$ jest aplikacją pewnej reguły, którą możemy także zastosować „w cywilu”, o czym pisaliśmy w poprzednim punkcie. Oczywiście także maszyna potrafi z łatwością obliczyć taki iloczyn, ale sama tylko zbieżność naszych wyników obliczania z wynikami dostarczonymi przez maszynę liczącą (komputer) nie wystarcza, by stwierdzić, że maszyna liczy. Maszyna robi to mechanicznie, nigdy nie może zastosować reguły „w cywilu”, działa tylko „nie w cywilu”, jest – by tak rzec – zawsze na służbie. Zasadą działania maszyny jest determinizm, ale, jak zauważa Wittgenstein, „w rachunku *nie istnieją* związki przyczynowe, lecz tylko związki właściwe obrazowi” (*UPM*, cz. VII, § 18), to znaczy wzorowi czy schematowi. Wyobraźmy sobie człowieka jaskiniowego, który w samotności rysuje na ścianie jaskini regularne ciągi znaków:

— . — — . — — . — — .

albo

— . — .. — ... — — .

Zdaniem Wittgensteina człowiek ten nie kieruje się ogólnym wyrazem reguły i „nie mówimy, że działa on w sposób prawidłowy, ponieważ my jesteśmy w stanie sformułować taki wyraz” (*UPM*, cz. VI, § 41). To znaczy fakt, że potrafimy przedstawić regułę jego działania, nie oznacza, że on sam postępuje zgodnie z tą regułą. Żeby to stwierdzić, potrzebne jest coś więcej niż sama tylko mechaniczna regularność. Co? Wittgenstein odpowiada:

Rozważmy bardzo proste reguły. Niech wyrazem reguły będzie pewna figura, np. taka:

|--|

Postępujemy zgodnie z tą regułą, rysując prosty szereg takich figur (np. w postaci ornamentu):

|--| |--| |--| |--| |--| |--|

W jakich okolicznościach powiedzielibyśmy: rysując taką figurę, ktoś formułuje pewną regułę? W jakich okolicznościach: ktoś postępuje zgodnie z tą regułą, gdy rysuje ten szereg? Trudno to opisać.

Gdyby zdarzyło się, że jakiś szympanś wyrzucił w gliniastym podłożu podobną figurę |--|, a następnie inny szympanś wyrzucił szereg |--| |--| |--| itd., nie znaczyłoby to, że pierwszy podał pewną regułę, do której drugi się zastosował, obojętnie, co zachodziłoby przy tym w ich umysłach [zmiana moja – P.D.] (*UPM*, cz. VI, § 42).

Kluczową sprawą jest tutaj to, że postępowanie zgodnie z regułą, liczenie czy też dowodzenie, nie jest zdarzeniem mentalnym, procesem zachodzącym w naszym umyśle, któremu towarzyszy regularne zachowanie. Postępowanie wedle reguły (*resp.* liczenie, dowodzenie) jest pewną społecznie utrwaloną praktyką, wymaga szeregu działań i zachowań, które podlegają społecznej kontroli. Przede wszystkim kierowanie się regułą jest nieodłączne logicznie od pojęcia popełniania błędu. Maszyna nie popełnia błędu, wszystko robi dobrze. Jeśli ktoś kieruje się regułą, to zawsze można zapytać, czy robi to właściwie, czy niewłaściwie. Jak podkreśla Peter Winch, pojęcie reguły nie miało by sensu, gdyby wszystko, co ktoś robi, było równie dobre (por. Winch 1995, s. 41). Z kolei to, czy ktoś postępuje właściwie, czy nie, zależy od istnienia ustanowionego wzorca, a w konsekwencji od kontaktu z innymi i ich oceny. Mówienie o zgodności bądź niezgodności w kierowaniu się regułą wymaga zatem standardu albo kryterium poprawności, które można też nazwać podzielanym wzorem zachowania pewnej wspólnoty. Na przykład osoba, która umie liczyć, umie też wyjaśnić swoje działania, skorygować je, jeśli się pomyli, nauczyć liczenia kogoś innego, uzasadnić kolejne kroki w obliczeniach itd. Czy maszyny (komputery) i szympanśy mogą to wszystko? Gdyby mogły, wówczas moglibyśmy powiedzieć, że działają wedle reguły, liczą, dowodzą, myślą: „Gdybyśmy jednak obserwowali np. zjawisko lekcji pewnego rodzaju, demonstrowania i naśladowania, udanych i nieudanych prób, nagradzania i karania itp.; gdyby w końcu poddany takiej tresurze szympanś był w stanie – jak w pierwszym przykładzie – kreślić figury, których nigdy przedtem nie widział, powiedzielibyśmy zapewne, że jeden szympanś wypisuje reguły, a drugi stosuje się do nich” (*UPM*, cz. VI, § 42).

Według Andrew Hodgesa, Turing wyjaśniał działanie swoich inteligentnych maszyn bez odwoływania się do kontaktu ze światem zewnętrznym, ale także separując myślenie od czynników zmysłowych i emocjonalnych, ograniczając je do dziedzin niewymagających doznań, ruchu czy uczuć (zob. Hodges 2014, s. 564–565). Reprezentował tym samym typową dla matematyków tendencję do traktowania maszyn i kartek papieru jako obiektów czysto symbolicznych, najlepiej nadających się do uchwycenia istoty myślenia. Jednakże zarówno myślenie, jak i liczenie są nie tylko artykułowaniem ciągu symboli, ale przede wszystkim działaniami żywego organizmu. Hodges podkreśla, że:

Jeśli, jak sugerował Alan, u istot ludzkich wiedza i inteligencja rodzą się z interakcji z otoczeniem, to sposób przechowywania owej wiedzy w ludzkich mózgach musi zależeć od charakteru tej interakcji. Struktura mózgu wiąże przechowywane słowa z sytuacjami, w których można ich użyć, z gniewem i łzami, rumieńcami i lękami, które im towarzyszą lub które zastępują (Hodges 2014, s. 565).

Moglibyśmy nazwać to w nawiązaniu do Wittgensteina „normatywnością” myślenia, której brak działaniom maszyn. W dyskretniej maszynie Turinga nie można przechowywać reguł i słów do inteligentnych celów. Trudno wyobrazić sobie inteligencję bez życia, umysł bez komunikacji, myślenie bez doświadczenia. Hodges konkluduje:

W przypadku myślenia szachowego, matematycznego czy technicznego lub dowolnego czysto symbolicznego systemu rozwiązywania zadań za poglądami Alana przemawiały potężne argumenty. Gdy jednak doszło do rozciągnięcia modelu na całą sferę komunikacji międzyludzkiej, zasadnicze pytania pozostały bez choćby próby odpowiedzi (Hodges 2014, s. 565).

5. Na zakończenie

Na koniec ułożmy ze słów Wittgensteina odpowiedź w kwestii myślenia człowieka i myślenia maszyny (komputera). Przytoczmy dwa fragmenty z *Dociekań*:

Spójrz na kamień i przedstaw sobie, że ma on doznania! – Mówimy sobie: jak można było w ogóle wpaść na pomysł, by *rzeczom* przypisywać *doznania*? Równie dobrze można by je przypisywać liczbom! – A teraz spójrz na trzepoczącą muchę i trudność znika natychmiast; ból ma tu o co *zahaczyć*, podczas gdy przedtem wszystko – by tak rzec – było dla niego gładkie (DF, § 284).

Czy nie mógłbym sobie wyobrazić, że ludzie dokoła mnie są automatami, nie mają świadomości, chociaż ich sposób postępowania jest taki sam, jak zawsze? – Gdy sobie to teraz – sam w moim pokoju – przedstawiam, to widzę tych ludzi, jak z nieruchomym wzrokiem (niczym w transie) oddają się swym czynnościom – pomysł trochę niesamowity. A spróbuj tylko trzymać się owego pomysłu w zwykłych warunkach, dajmy na to na ulicy! Powiedz sobie

na przykład: „Te dzieci tam, to są tylko automaty; cała ich ruchliwość jest jedynie automatyczna”. Słowa te przestaną ci cokolwiek mówić, bądź też wytworzysz w sobie poczucie niejakej niesamowitości albo coś w tym rodzaju (*DF*, § 420).

Parafrazując oba paragrafy, powiedzmy tak: spójrz na swój komputer i przedstaw sobie, że może on myśleć! Jak można w ogóle wpaść na pomysł, by rzeczom przypisywać myślenie? Równie dobrze można by je przypisać liczbom. A teraz spójrz na bawiące się w parku dzieci! Trudność natychmiast znika; myślenie ma tu o co zahaczyć, podczas gdy przedtem wszystko było dla niego gładkie. Ale o co „zahacza” tu myślenie?

W odpowiedzi na to pytanie odwołajmy się do rozważań Maurice’a Merleau-Ponty’ego w jego *Fenomenologii percepcji*, dotyczących opisu postrzegania innego człowieka (por. Merleau-Ponty 2001, s. 372–379)¹⁰. Przede wszystkim należy wyzbyć się myślenia obiektywistycznego, to znaczy myślenia, w którym innego umieszczam w świecie przedmiotów, bym mógł go odróżnić od siebie. Ten drugi nie jest bowiem zwykłym przedmiotem jak inne. Jak mówi Merleau-Ponty, jest „bytem dla siebie”, czyli świadomością. Co więcej, aby pomyśleć innego jako prawdziwe Ja, musiałbym pomyśleć siebie jako zwykły przedmiot dla niego, lecz na to nie pozwala mi moja samowiedza. Unikniemy tej aporii, gdy moja percepcja drugiego człowieka nie będzie sprowadzała go do rangi przedmiotu w moim polu widzenia ani mnie do rangi przedmiotu w jego polu widzenia. Jest to możliwe, jeśli moje ciało i ciało innego będziemy postrzegać jako zachowanie. Doświadczam bowiem swojego ciała zawsze jako możliwości pewnych zachowań i pewnego świata. Ciało innego zaś postrzegam, znajdując w nim jakby przedłużenie własnych intencji i znajomy sposób traktowania świata.

Postrzegam innego jako zachowanie, na przykład widzę żal albo gniew drugiego człowieka w jego postępowaniu, na jego twarzy i na jego rękach, niczego nie zapożyczając z „wewnętrznego” doświadczenia żalu lub gniewu, ponieważ żal i gniew są odmianami bycia w świecie, w których nie istnieje podział na ciało i świadomość i które występują zarówno w postępowaniu innego widzialnym w jego fenomenalnym ciele, jak w moim w własnym zachowaniu, którego doświadczam (Merleau-Ponty 2001, s. 378).

Kiedy moje spojrzenie zatrzymuje się na żywym i działającym ciele, to otaczające je przedmioty zyskują natychmiast nowe znaczenie, które nie ja im nadaję, lecz inny, wokół którego wytwarza się wir. Mój świat zanika w tym wirze i wtedy dociera do mnie, że nie jest to tylko mój świat, a rzeczy uznawane za moje są traktowane w inny sposób. Tym samym drugi człowiek przestaje być już zwyczajnym fragmentem świata, jest raczej pewnym „widzeniem” świata. Wiem, że jest to drugi Ja, ponieważ to żywe ciało ma taką samą

¹⁰ Na zbieżność poglądów Wittgensteina i Merleau-Ponty’ego w wielu kwestiach zwracano już uwagę w literaturze przedmiotu (zob. np. Romdenh-Romluc 2017; Kuusela 2020).

strukturę jak moje. Podobnie jest dla Wittgensteina: myślenie zahacza o zachowanie, o to, że ja i inny (dzieci bawiące się w parku) tworzymy pewien system, w którym moje ciało i ich ciała są jednością niczym awers i rewers jednego zjawiska, które Merleau-Ponty nazywał „egzystencją”, a Wittgenstein „sposobem życia” (*Lebensform*).

Bibliografia

- Floyd J. (2012), *Wittgenstein's Diagonal Argument: A Variation on Cantor and Turing*, w: P. Dybjer i in. (red.), *Epistemology versus Ontology*, Dordrecht: Springer Science + Business Media.
- Floyd J. (2017), *Turing on „Common Sense”: Cambridge Resonances*, w: J. Floyd, A. Bokulich (red.), *Philosophical Explorations of the Legacy of Alan Turing*, „Boston Studies in the Philosophy and History of Science” 324, s. 103–149.
- Floyd J., Mühlhölzer F. (2020), *Wittgenstein's Annotations to Hardy's Course of Pure Mathematics: An Investigation of Wittgenstein's Non-Extensionalist Understanding of the Real Numbers*, Nordic Wittgenstein Studies, Cham: Springer.
- Hacker P.M.S. (1990), *Wittgenstein. Meaning and Mind. An Analytical Commentary to the „Philosophical Investigations”*, t. 3, Oxford: Basil Blackwell.
- Harwood A. (2020), *Wittgenstein's Remarks on Mathematics, Turing, and Computability*, Master's thesis, University College London, <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10093229>.
- Hodges A. (2014), *Alan Turing: Enigma*, przeł. W. Bartol, Warszawa: Albatros.
- Kuusela O. (red.) (2020), *Wittgenstein and Phenomenology*, New York – London: Routledge.
- Merleau-Ponty M. (2001), *Fenomenologia percepcji*, przeł. M. Kowalska, J. Migaśiński, Warszawa: Fundacja Aletheia.
- Murawski R. (2001), *O dojrzewaniu świadomości różnicy między prawdziwością a dowodliwością w matematyce*, „Filozofia Nauki” 1 (33).
- Romdenh-Romluc K. (red.) (2017), *Wittgenstein and Merleau-Ponty*, New York – London: Routledge.
- Russell B. (2003), *Wstęp do filozofii matematyki*, przeł. Cz. Znamierowski, Warszawa: Fundacja Aletheia.
- Shanker S.G. (1987), *Wittgenstein versus Turing on the Nature of Church's Thesis*, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 28 (4), s. 615–649.
- Shanker S.G. (1998), *Wittgenstein's Remarks on the Foundations of AI*, Routledge: London and New York.
- Turing A.M. (1936), *On Computable Numbers, with an Applications to the Entscheidungsproblem*, „Proceedings of the London Mathematical Society” 42 (1), s. 230–265.
- Turing A.M. (1972), *Maszyny liczące a inteligencja*, przeł. D. Gajkiewicz, w: E. Feigenbaum, J. Feldman (red.), *Maszyny matematyczne i myślenie*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

- Winch P. (1995), *Idea nauki o społeczeństwie i jej związku z filozofią*, przeł. B. Chwedeńczuk, Warszawa: Oficyna Naukowa.
- Wittgenstein L. (1956), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik / Remarks on the Foundations of Mathematics*, red. G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein L. (1976), *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939: From the Notes of R.G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies* [cyt. jako: *LFM*], red. C. Diamond, Ithaca – New York: Cornell University Press.
- Wittgenstein L. (1997), *Tractatus logico-philosophicus* [cyt. jako: *TLP*], przeł. B. Wolniewicz, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Wittgenstein L. (1998), *Niebieski i brązowy zeszyt* [cyt. jako: *NB*], przeł. A. Lipszyc, Ł. Sommer, Warszawa: Wydawnictwo Spacja.
- Wittgenstein L. (1999a), *Kartki* [cyt. jako: *K*], przeł. S. Lisiecka, Warszawa: Wydawnictwo KR.
- Wittgenstein L. (1999b), *Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie* [cyt. jako: *BPP*], t. I–II, w: tenże, *Werkausgabe*, t. 7, Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Wittgenstein L. (2000a), *Dociekania filozoficzne* [cyt. jako: *DF*], przeł. B. Wolniewicz, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Wittgenstein L. (2000b), *The Big Typescript* [cyt. jako: *BT*], w: tenże, *Wiener Ausgabe*, t. 11, red. M. Nedo, Wien – New York: Springer Verlag.
- Wittgenstein L. (2000c), *Uwagi o podstawach matematyki* [cyt. jako: *UPM*], przeł. M. Poręba, Warszawa: Wydawnictwo KR.

P i o t r D e h n e l

Man and Machine, Machine and Man: Wittgenstein and Turing

Keywords: *contradiction, diagonal proof, machine, philosophy of mathematics, thinking*

Ludwig Wittgenstein and Alan Turing met in Cambridge in 1937, both of them working on the foundations of mathematics at the time. The exchange of ideas between them took place at Wittgenstein's 1939 lectures. The article discusses the main topic of this exchange, namely the problem of contradiction in mathematics, and posits that Wittgenstein accepted the version of Cantor's diagonal proof used by Turing in his *On Computable Numbers* (1936). He disagreed, however, with Turing's interpretation and answer to the question: „Can machines think?”.